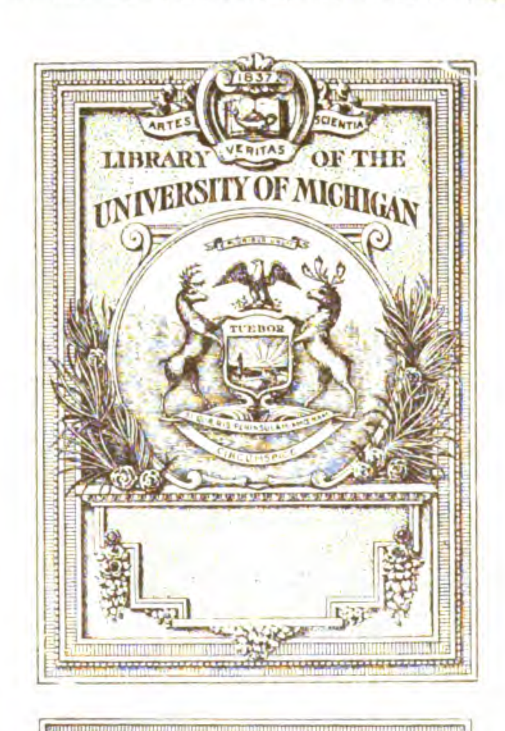



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
CIRCUMSPICE

GRUNDLAGEN

EINER

KRÜMMUNGSLEHRE

DER

CURVENSCHAREN

VON

Dr. R. v. Lilienthal
A. O. PROFESSOR AN DER KGL. AKADEMIE ZU MÜNSTER I. W.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1896.

Prof. Alex. Ziwet
gt.
1-25-1923

Vorwort.

Denkt man sich die Coordinaten der Punkte einer Curve ausser von einer Veränderlichen noch abhängig von einem Parameter oder zwei Parametern (Unbestimmten), so erhält man eine einfach oder doppelt unendliche *Curvenschar*, in der Bezeichnung französischer und italienischer Mathematiker eine *Curvencongruenz*.

Die Krümmungseigenschaften einer solchen Schar hängen ab von den Krümmungseigenschaften der Einzelcurven der Schar, welche mit Hülfe der Methoden der Curvenlehre zu erforschen sind, und von der Art der Anordnung der Curven. Die Untersuchung dieser Anordnung macht die Betrachtung der orthogonalen Trajectorien der Schar nothwendig und damit die Einführung zusammengesetzter Differentiationen, die sich, wenn die Forderung der Invariabilität hinzukommt, zu Operationen erweitern, welche *Ableitungen nach Bogenlängen* genannt werden können. Der Aufstellung und Anwendung dieses Begriffs ist der erste Theil der folgenden Schrift gewidmet, der von den einfach unendlichen Curvenscharen handelt und zwar von den in einer Ebene gelegenen wie den eine gekrümmte Fläche bildenden.

Eine doppelt unendliche Curvenschar kann sowohl durch endliche Gleichungen, wie durch Differentialgleichungen gegeben sein. Der erste dieser Fälle wird im zweiten Theil der folgenden Schrift behandelt, wobei gleichzeitig die wichtigeren Fragen über Flächenscharen besprochen werden; dem zweiten Fall ist der dritte Theil der Schrift gewidmet.

Das Ganze kann man sowohl als eine Verallgemeinerung der Krümmungslehre der Flächen auffassen, wie als eine Theorie der allgemeinsten krummlinigen, aber rechtwinkligen Coordinaten. Der Cartesius'sche Coordinatenbegriff ist nämlich einer doppelten Verallgemeinerung fähig. Einmal kann man an Stelle der drei zu einander senkrechten Scharen paralleler Ebenen drei zu einander senkrechte Flächenscharen setzen und erhält so die Lamé'sche Theorie, deren Methoden mit den in der Flächentheorie benutzten zusammenfallen.

Zweitens aber kann man an die Stelle der drei zu einander senkrechten Scharen paralleler gerader Linien drei zu einander senkrechte Scharen gekrümmter Linien setzen, oder, was dasselbe ist, eine Curvenschar nebst zweien zu einander senkrechten Scharen ihrer orthogonalen Trajectorien. Sollen die beiden letzteren durch die erste allein bestimmt sein, so bieten sich naturgemäss an Stelle derselben die beiden Scharen der Krümmungslinien erster Art der ersten Curvenschar dar.

In Bezug auf die Darstellung war der Verfasser bemüht, durch Voraussetzung geringer Vorkenntnisse dem Leser möglichst entgegenzukommen.

Münster i. W., 8. Juli 1896.

R. v. Lilienthal.

Inhaltsverzeichniss.

Erster Theil.

Einfach unendliche Curvenschar.

Zweiter Theil.

Doppelt unendliche Curvenschar, festgelegt durch endliche Gleichungen.

Dritter Theil.

Doppelt unendliche Flächenschar, festgelegt durch Differentialgleichungen.

Erster Theil.

Einfach unendliche Curvenschar.

§ 1. Krümmung einer ebenen, einfach unendlichen Curvenschar.

Eine ebene, einfach unendliche Curvenschar lässt sich auf zweierlei Art durch Gleichungen darstellen, einmal durch *endliche* Gleichungen, indem die Cartesischen Coordinaten x, y der Punkte der Curven als Functionen zweier Veränderlicher p und t gegeben werden, etwa in der Form:

$$x = f_1(p, t), \quad y = f_2(p, t),$$

wo t längs jeder Einzelcurve der Schar fest bleibt und nur von Curve zu Curve seinen Werth ändert, und dann durch eine *Differentialgleichung* erster Ordnung, etwa:

$$dx : dy = \varphi_1(x, y) : \varphi_2(x, y).$$

Mit der Curvenschar aufs Engste verbunden ist die Schar ihrer orthogonalen Trajectorien. Beide Scharen bilden ein rechtwinkliges System krummliniger Coordinatencurven.

Die Tangenten der Curven $t =$ Const. schliessen mit der X- bez. Y-Axe Winkel ein, deren Cosinus $\varkappa$ bez. λ genannt seien. Ebenso sollen ξ bez. η die Cosinus der Winkel bezeichnen, welche die Tangenten der orthogonalen Trajectorien der Curven $t =$ Const. mit der X- bez. Y-Axe einschliessen. Legen wir die erste Darstellungsart der Curvenschar zu Grunde und setzen:

$$a_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2,$$

so entsteht:

$$\varkappa = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \frac{\partial x}{\partial p}, \quad \lambda = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \frac{\partial y}{\partial p}.$$

Wir nehmen ferner:

$$\xi = -\lambda, \quad \eta = \varkappa.$$

Die Zuwächse dx, dy der Cartesischen Coordinaten eines Punktes längs

einer durch den Punkt gehenden Curve lassen sich in der Form darstellen:

$$dx = \varkappa T_1 - \lambda T_0, \quad dy = \lambda T_1 + \varkappa T_0,$$

wenn:

$$T_1 = \frac{a_{11}dp + a_{12}dt}{\sqrt{a_{11}}}, \quad T_0 = \frac{\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial t}}{\sqrt{a_{11}}}dt = \frac{\Delta}{\sqrt{a_{11}}}dt,$$

und:

$$a_{12} = \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Man kann die linearen Differentialformen T_1 und T_0 als Bogenelemente der Coordinatenlinien auffassen, da das Bogenelement einer beliebigen durch den Punkt (x, y) gehenden Curve den Ausdruck $\sqrt{T_1^2 + T_0^2}$ erhält. Diese Auffassung ist als eine Erweiterung der gewöhnlichen anzusehen, nach welcher T_1 bei $T_0 = 0$ das Bogenelement der Curven der Schar, und T_0 bei $T_1 = 0$ das Bogenelement ihrer orthogonalen Trajectorien darstellt.

Weil:

$$dt = \frac{\sqrt{a_{11}}}{\Delta}T_0, \quad dp = \frac{\Delta T_1 - a_{12}T_0}{\Delta\sqrt{a_{11}}},$$

so wird das Differential einer beliebigen Function $\mathfrak{F}$ von p und t eine lineare Form von T_0 und T_1.

Wir setzen:

$$d\mathfrak{F} = (d\mathfrak{F})_{T_1}T_1 + (d\mathfrak{F})_{T_0}T_0,$$

wo:

$$(d\mathfrak{F})_{T_1} = \frac{1}{\sqrt{a_{11}}}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial p}, \quad (d\mathfrak{F})_{T_0} = \frac{1}{\Delta\sqrt{a_{11}}}\left(-a_{12}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial p} + a_{11}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial t}\right).$$

Die Operationen $(d\mathfrak{F})_{T_1}$ und $(d\mathfrak{F})_{T_0}$ sollen *Ableitungen von F nach den Bogenlängen der Coordinatenlinien* genannt werden.

Man hat an Stelle der Bezeichnungsweise $(d\mathfrak{F})_{T_1}$, $(d\mathfrak{F})_{T_0}$ vielfach die Schreibweise $\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial s}$, $\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial n}$ angewandt, unter s bez. n die Bogenlängen der Curven $t = \text{Const.}$ bez. ihrer orthogonalen Trajectorien verstehend. Allein diese Schreibweise erweckt zu leicht die Vorstellung, als ob man s und n zu unabhängigen Veränderlichen nehmen könne. Letzteres ist aber nur der Fall, wenn T_0 und T_1 vollständige Differentiale sind, was, wie leicht zu sehen, auf die Gleichungen hinauskommt:

$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial^2 y}{\partial p^2} - \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} = 0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial^2 y}{\partial p\partial t} - \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial t} = 0$$

oder:

$$\frac{\partial\varkappa}{\partial p} = \frac{\partial\varkappa}{\partial t} = 0.$$

Das Erfülltsein dieser Gleichungen drückt aus, dass die gegebene Curvenschar aus einem System paralleler gerader Linien besteht, und nur in diesem Fall ist die fragliche Schreibweise berechtigt.

Operationen, wie $(d\mathfrak{F})_{T_1}$, $(d\mathfrak{F})_{T_0}$, welche linear und homogen aus Differentiationen zusammengesetzt sind, hat man neuerdings auch *Differentialparameter* genannt. Ich werde jedoch diese Benennung ausschliesslich für das verwenden, was Lamé, der Urheber dieser nicht gerade glücklichen Wortbildung, darunter verstanden hat.

Für die wiederholte Anwendung der Operationen $(d\mathfrak{F})_{T_1}$, $(d\mathfrak{F})_{T_0}$ benutzen wir die Bezeichnungsweise:

$$d(d\mathfrak{F})_{T_1} = (d\mathfrak{F})_{T_1^2} T_1 + (d\mathfrak{F})_{T_1 T_0} T_0, \quad d(d\mathfrak{F})_{T_0} = (d\mathfrak{F})_{T_0 T_1} T_1 + (d\mathfrak{F})_{T_0^2} T_0.$$

Eine Hauptfrage bezieht sich nun auf den Einfluss der Vertauschung beider Operationen. Sie wird durch einen allgemeinen Satz beantwortet.

Wir nehmen:

$$\nu_1 T_1 = d\tau, \quad \nu_0 T_0 = dt.$$

ν_1 und ν_0 sind integrirende Factoren, von denen ν_0 bekannt und gleich $\frac{\sqrt{a_{11}}}{\Delta}$ ist, während ν_1 der Differentialgleichung genügt:

$$(d \log \nu_1)_{T_0} = \frac{1}{\Delta}\left(\frac{\partial}{\partial p}\frac{a_{12}}{\sqrt{a_{11}}} - \frac{\partial \sqrt{a_{11}}}{\partial t}\right).$$

Eine Function $\mathfrak{F}$ von p und t ist auch eine solche von t und τ. Für $\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial t\, \partial \tau}$ hat man aber die beiden Darstellungen:

$$\frac{1}{\nu_1 \nu_0}\left((d\mathfrak{F})_{T_1 T_0} - (d\mathfrak{F})_{T_1} (d \log \nu_1)_{T_0}\right)$$

und

$$\frac{1}{\nu_1 \nu_0}\left((d\mathfrak{F})_{T_0 T_1} - (d\mathfrak{F})_{T_0} (d \log \nu_0)_{T_1}\right),$$

sodass der gesuchte Satz die Form erlangt:

$$(d\mathfrak{F})_{T_1 T_0} - (d\mathfrak{F})_{T_0 T_1} = (d\mathfrak{F})_{T_1} (d \log \nu_1)_{T_0} - (d\mathfrak{F})_{T_0} (d \log \nu_0)_{T_1}.$$

Für die Grössen $(d \log \nu_1)_{T_0}$ und $(d \log \nu_0)_{T_1}$ ergeben sich anschauliche Bedeutungen, wenn man in der vorstehenden Gleichung statt $\mathfrak{F}$ der Reihe nach x und y setzt.

Da:

$$(dx)_{T_1} = \varkappa, \quad (dy)_{T_1} = \lambda, \quad (dx)_{T_0} = \xi, \quad (dy)_{T_0} = \eta,$$

so wird:

$$(d \log \nu_1)_{T_0} = -\varkappa (d\xi)_{T_1} - \lambda (d\eta)_{T_1}, \quad (d \log \nu_0)_{T_1} = -\xi (d\varkappa)_{T_0} - \eta (d\lambda)_{T_0}.$$

Nennen wir den Krümmungsradius der Curven $t =$ Const. ϱ_1, den ihrer orthogonalen Trajectorien ϱ_0, so ist:

$$\frac{1}{\varrho_1} = \xi (d\varkappa)_{T_1} + \eta (d\lambda)_{T_1}, \quad \frac{1}{\varrho_0} = \varkappa (d\xi)_{T_0} + \lambda (d\eta)_{T_0},$$

folglich:

$$(d \log \nu_1)_{T_0} = \frac{1}{\varrho_1}, \quad (d \log \nu_0)_{T_1} = \frac{1}{\varrho_0}$$

und:

$$(d\mathfrak{F})_{T_1 T_0} - (d\mathfrak{F})_{T_0 T_1} = \frac{(d\mathfrak{F})_{T_1}}{\varrho_1} - \frac{(d\mathfrak{F})_{T_0}}{\varrho_0}.$$

Diese Beziehung zeigt, dass die lineare Differentialform:

$$a_1 T_1 + a_0 T_0$$

ein vollständiges Differential ist, wenn:

$$(da_1)_{T_0} - (da_0)_{T_1} = \frac{a_1}{\varrho_1} - \frac{a_0}{\varrho_0}.$$

Eine Differentialgleichung zwischen ϱ_1 und ϱ_0 ergiebt sich, wenn man in der vorletzten Gleichung $\mathfrak{F}$ durch $\varkappa$ oder λ ersetzt.

Da:

$$(d\varkappa)_{T_1} = -\frac{\lambda}{\varrho_1}, \quad (d\lambda)_{T_1} = \frac{\varkappa}{\varrho_1},$$

$$(d\varkappa)_{T_0} = \frac{\lambda}{\varrho_0}, \quad (d\lambda)_{T_0} = -\frac{\varkappa}{\varrho_0},$$

so folgt:

$$\left(d\frac{1}{\varrho_1}\right)_{T_0} - \left(d\frac{1}{\varrho_0}\right)_{T_1} = \frac{1}{\varrho_1^2} + \frac{1}{\varrho_0^2}.$$

An Stelle der ersten Definitionsart einer Curvenschar benutzt man häufig die folgende:

$$f(x, y) = t.$$

Man kann dieselbe als aus der allgemeineren:

$$x = f_1(p, t), \quad y = f_2(p, t)$$

dadurch entstanden betrachten, dass $f_1 = p$ genommen und die Gleichung

$$y = f_2(x, t)$$

nach t aufgelöst ist. Hier erhält man:

$$\varkappa = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \quad \lambda = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

$$a_{11} = 1 + \frac{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}, \quad a_{12} = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}}{\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}, \quad \Delta = \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}},$$

$$T_1 = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}\,dx - \frac{\partial f}{\partial x}\,dy}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \quad T_0 = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\,dx + \frac{\partial f}{\partial y}\,dy}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

$$(d\mathfrak{F})_{T_1} = \frac{\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}, \quad (d\mathfrak{F})_{T_0} = \frac{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}},$$

$$\nu_0 = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

Bei der zweiten Definitionsart einer Curvenschar, die sich mit Hülfe einer Differentialgleichung von der Form:

$$dx : dy = \varphi_1(x, y) : \varphi_2(x, y)$$

vollzieht, erhalten wir:

$$\varkappa = \frac{\varphi_1}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}}, \qquad \lambda = \frac{\varphi_2}{\sqrt{\varphi_1^2 + \varphi_2^2}},$$

$$T_1 = \varkappa dx + \lambda dy, \qquad T_0 = -\lambda dx + \varkappa dy,$$

$$(d\mathfrak{F})_{T_1} = \varkappa \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \lambda \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}, \quad (d\mathfrak{F})_{T_0} = -\lambda \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \varkappa \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y},$$

$$\frac{1}{\varrho_0} = -\frac{\partial \varkappa}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y}, \qquad \frac{1}{\varrho_1} = -\frac{\partial \varkappa}{\partial y} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}.$$

Die eingeführten Ableitungen nach Bogenlängen sind *invariable Operationen*. Der Sinn dieser Benennung erhellt aus folgender Ueberlegung.

Betrachten wir eine Curvenschar als gegeben durch die Gleichungen:

$$x = f_1(p, t), \quad y = f_2(p, t),$$

so bleibt sie ungeändert, wenn man an Stelle von p eine Function von q und τ, an Stelle von t eine Function von τ allein einführt und τ längs jeder Einzelcurve der Schar als unveränderlich betrachtet.

Ist nun:

$$a'_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \tau}\right)^2, \quad a'_{12} = \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial \tau} + \frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial y}{\partial \tau}, \quad \Delta' = \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial y}{\partial \tau} - \frac{\partial y}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial \tau},$$

so wird:

$$T_1 = \frac{a'_{11} dq + a'_{12} d\tau}{\sqrt{a'_{11}}}, \quad T_0 = \frac{\Delta'}{\sqrt{a'_{11}}} d\tau,$$

$$(d\mathfrak{F})_{T_1} = \frac{1}{\sqrt{a'_{11}}}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q}, \qquad (d\mathfrak{F})_{T_0} = \frac{1}{\Delta'\sqrt{a'_{11}}}\left(-a'_{12}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q} + a'_{11}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \tau}\right).$$

Bei der zweiten Definitionsart bleibt die Curvenschar ungeändert, wenn man an Stelle des Coordinatensystems der x, y ein anderes, rechtwinkliges Coordinatensystem, das der u, v einführt. Nennt man hier $\varkappa', \lambda'$ die Cosinus der Winkel, welche die Tangenten der Curven der Schar mit den Axen der u, v bilden, so hat man:

$$T_1 = \varkappa' du + \lambda' dv, \qquad T_0 = -\lambda' du + \varkappa' dv,$$

$$(d\mathfrak{F})_{T_1} = \varkappa' \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u} + \lambda' \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial v}, \quad (d\mathfrak{F})_{T_0} = -\lambda' \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u} + \varkappa' \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial v}.$$

In beiden Fällen ergiebt also dieselbe Bildungsweise dasselbe Ergebniss; im ersten Fall ist die Wahl der unabhängigen Veränderlichen, im zweiten die des Coordinatensystems ohne Einfluss.

Mit einer Function $\mathfrak{F}$ von x und y hängen zwei aus Ableitungen von $\mathfrak{F}$ gebildete Functionen eng zusammen, die von verschiedenen Gesichtspunkten aus als wichtig erscheinen.

Wir setzen mit Lamé (Leçons sur les coordonnées curvilignes S. 6)

$$(\varDelta_1 \mathfrak{F})^2 = \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}\right)^2,$$

$$\varDelta_2 \mathfrak{F} = \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial y^2},$$

und nennen $\varDelta_1 \mathfrak{F}$ den ersten, $\varDelta_2 \mathfrak{F}$ den zweiten *Differentialparameter* von $\mathfrak{F}$. Dabei ist das Vorzeichen von $\varDelta_1 \mathfrak{F}$ ohne Einfluss und kann ein für allemal gleich $+$ genommen werden.

Welche Gestalt erhalten die Differentialparameter unter Zugrundelegung krummliniger Coordinaten?

Man hat:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = \varkappa \, (d\mathfrak{F})_{T_1} - \lambda \, (d\mathfrak{F})_{T_0},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} = \lambda \, (d\mathfrak{F})_{T_1} + \varkappa \, (d\mathfrak{F})_{T_0},$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x^2} = \varkappa^2 \, (d\mathfrak{F})_{T_1^2} - \varkappa\lambda \{(d\mathfrak{F})_{T_1 T_0} + (d\mathfrak{F})_{T_0 T_1}\} + \lambda^2 \, (d\mathfrak{F})_{T_0^2}$$
$$- (\lambda \, (d\mathfrak{F})_{T_1} + \varkappa \, (d\mathfrak{F})_{T_0}) \left(\frac{\varkappa}{\varrho_1} + \frac{\lambda}{\varrho_0}\right),$$

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial y^2} = \lambda^2 \, (d\mathfrak{F})_{T_1^2} + \varkappa\lambda \{(d\mathfrak{F})_{T_1 T_0} + (d\mathfrak{F})_{T_0 T_1}\} + \varkappa^2 \, (d\mathfrak{F})_{T_0^2}$$
$$+ (\varkappa \, (d\mathfrak{F})_{T_1} - \lambda \, (d\mathfrak{F})_{T_0}) \left(\frac{\lambda}{\varrho_1} - \frac{\varkappa}{\varrho_0}\right),$$

folglich erhält man als Definition der Differentialparameter einer Function $\mathfrak{F}$ für krummlinige Coordinaten:

$$(\varDelta_1 \mathfrak{F})^2 = (d\mathfrak{F})^2_{T_1} + (d\mathfrak{F})^2_{T_0},$$

$$\varDelta_2 \mathfrak{F} = (d\mathfrak{F})_{T_1^2} + (d\mathfrak{F})_{T_0^2} - \frac{(d\mathfrak{F})_{T_1}}{\varrho_0} - \frac{(d\mathfrak{F})_{T_0}}{\varrho_1}.$$

Die Differentialparameter einer Function sind sogenannte *invariable* Functionen, d. h. sie besitzen an derselben Stelle (x, y) stets denselben Werth, was für ein System von Coordinatenlinien man auch zur Bestimmung von T_1, T_0 benutzt haben möge. Man überzeugt sich hiervon

leicht durch folgende Überlegung. Wir nehmen ausser der vorhin betrachteten Curvenschar eine zweite und bezeichnen die für dieselbe gebildeten Ausdrücke $\varkappa$, λ, ϱ_1, ϱ_0, T_1, T_0 der Reihe nach mit $\varkappa'$, λ', r_1, r_0, S_1, S_0. Wir setzen ausserdem:

$$\varkappa\varkappa' + \lambda\lambda' = \cos\varphi,$$
$$\varkappa\lambda' - \lambda\varkappa' = \sin\varphi.$$

Da: $\quad S_1 = \varkappa' dx + \lambda' dy, \quad S_0 = -\lambda' dx + \varkappa' dy,$

so wird:

$$\begin{aligned} T_1 &= -\sin\varphi\, S_0 + \cos\varphi\, S_1, \\ T_0 &= \quad \sin\varphi\, S_1 + \cos\varphi\, S_0, \\ (d\mathfrak{F})_{S_1} &= \quad \cos\varphi\,(d\mathfrak{F})_{T_1} + \sin\varphi\,(d\mathfrak{F})_{T_0}, \\ (d\mathfrak{F})_{S_0} &= -\sin\varphi\,(d\mathfrak{F})_{T_1} + \cos\varphi\,(d\mathfrak{F})_{T_0}. \end{aligned}$$

Dies zeigt, dass der erste Differentialparameter eine invariable Function ist, da:

$$(d\mathfrak{F})^2_{T_1} + (d\mathfrak{F})^2_{T_0} = (d\mathfrak{F})^2_{S_1} + (d\mathfrak{F})^2_{S_0}.$$

Man hat ferner:

$$(d\mathfrak{F})_{S_1^2} + (d\mathfrak{F})_{S_0^2} = (d\mathfrak{F})_{T_1^2} + (d\mathfrak{F})_{T_0^2} + (d\mathfrak{F})_{T_0}(d\varphi)_{T_1} - (d\mathfrak{F})_{T_1}(d\varphi)_{T_0}.$$

Um die Grössen r_0 und r_1 zu berechnen, kann man etwa die Gleichungen:

$$\frac{\varkappa'}{r_1} = (d\lambda')_{S_1}, \quad \frac{\varkappa'}{r_0} = -(d\lambda')_{S_0}$$

benutzen. Hier wird:

$$(d\lambda')_{S_1} = \varkappa'\left\{\quad \cos\varphi\left(\frac{1}{\varrho_1} + (d\varphi)_{T_1}\right) - \sin\varphi\left(\frac{1}{\varrho_0} - (d\varphi)_{T_0}\right)\right\},$$

$$(d\lambda')_{S_0} = \varkappa'\left\{-\sin\varphi\left(\frac{1}{\varrho_1} + (d\varphi)_{T_1}\right) - \cos\varphi\left(\frac{1}{\varrho_0} - (d\varphi)_{T_0}\right)\right\}$$

und damit:

$$\frac{(d\mathfrak{F})_{S_1}}{r_0} + \frac{(d\mathfrak{F})_{S_0}}{r_1} = \frac{(d\mathfrak{F})_{T_1}}{\varrho_0} + \frac{(d\mathfrak{F})_{T_0}}{\varrho_1} - (d\mathfrak{F})_{T_1}(d\varphi)_{T_0} + (d\mathfrak{F})_{T_0}(d\varphi)_{T_1}.$$

Jetzt folgt:

$$(d\mathfrak{F})_{S_1^2} + (d\mathfrak{F})_{S_0^2} - \frac{(d\mathfrak{F})_{S_1}}{r_0} - \frac{(d\mathfrak{F})_{S_0}}{r_1} = (d\mathfrak{F})_{T_1^2} + (d\mathfrak{F})_{T_0^2} - \frac{(d\mathfrak{F})_{T_1}}{\varrho_0} - \frac{(d\mathfrak{F})_{T_0}}{\varrho_1},$$

somit ist auch der zweite Differentialparameter eine invariable Function.

Als hervorstechende Arten von Curvenscharen führen wir solche *paralleler* und *isothermer* Curven an. Die ersteren besitzen die Eigenschaft, dass ihre orthogonalen Trajectorien gerade Linien sind, sodass $\frac{1}{\varrho_0} = 0$. Bei der Darstellungsart:

$$x = f_1(p, t), \quad y = f_2(p, t)$$

hat man es daher mit parallelen Curven zu thun, wenn:

$$\frac{\partial}{\partial p}\frac{\sqrt{a_{11}}}{\Delta} = 0,$$

bei der Darstellungsart:

$$f(x, y) = t$$

wenn:

$$(d\Delta_1 f)_{T_1} = 0,$$

und bei der Darstellungsart:

$$dx : dy = \varphi_1(x, y) : \varphi_2(x, y),$$

wenn $\lambda dx - \varkappa dy$ ein vollständiges Differential ist.

Der Name *Parallelcurven* wird durch zwei Eigenschaften dieser Linien gerechtfertigt, die sich folgendermassen begründen lassen.

Es sei: $f(x, y) = t$ die Gleichung einer Curvenschar. Wir fassen eine Einzelcurve der Schar in's Auge, indem wir t einen besonderen Werth t_0 beilegen und x, y als die Coordinaten eines Punktes P betrachten, der diese Einzelcurve (t_0) durchläuft.

Man nehme nun:

$$u = x + h\xi = x - \lambda h, \quad v = y + h\eta = y + \varkappa h.$$

Dann sind u, v die Coordinaten eines Punktes Q auf der zu P gehörenden Normale der Curve (t_0). Wann wird Q eine zweite Curve der Schar durchlaufen? Hierzu ist erforderlich, dass h aus der Gleichung:

$$f(x - \lambda h, y + \varkappa h) = t_0 + \Delta t_0$$

bestimmt werde, wo Δt_0 eine beliebige Zahlengrösse ist. Entwickelt man die linke Seite dieser Gleichung nach Potenzen von h, so ergiebt sich:

$$\Delta t_0 = h \,.\, \Delta_1 f + \frac{h^2}{2!}(d\Delta_1 f)_{T_0} + \frac{h^3}{3!}(d\Delta_1 f)_{T_0^2} + \cdots.$$

Wenn $(d\Delta_1 f)_{T_1} = 0$, hängt $\Delta_1 f$ nicht mehr von τ ab und ist längs der Curve (t_0) constant. Damit ist aber h nach Wahl von Δt_0 constant, also auch $(dh)_{T_1} = 0$.

Betrachten wir ferner den Quotienten $\frac{du}{dv}$ längs der Curve $(t_0 + \Delta t_0)$. Man erhält ihn, wenn er durch dx und dy ausgedrückt und $dx : dy$ gleich $\varkappa : \lambda$ genommen wird. Dadurch entsteht:

$$\frac{du}{dv} = \frac{\varkappa\left(1 - \frac{h}{\varrho_1}\right) - \lambda (dh)_{T_1}}{\lambda\left(1 - \frac{h}{\varrho_1}\right) + \varkappa (dh)_{T_1}}$$

und bei: $(dh)_{T_1} = 0$: $\quad \frac{du}{dv} = \frac{\varkappa}{\lambda}$.

Nennt man Punkte wie P und Q *entsprechende* Punkte, so zeigt das Vorige, dass parallele Curven in entsprechenden Punkten parallele Tangenten besitzen, und dass der Abstand entsprechender Punkte längs zweier paralleler Curven sich nicht ändert.

Isotherme Curvenscharen definirt man nach dem Vorgange Lamé's (leçons S. 31) folgendermassen. Es sei $f(x, y) = t$ die Gleichung einer Curvenschar, $\varphi(x, y) = \tau$ die Gleichung ihrer orthogonalen Trajectorien. Die Curvenschar ist *isotherm*, wenn das Verhältniss:

$$\frac{\Delta_2 t}{(\Delta_1 t)^2}$$

nur von t, nicht von τ abhängt. Obgleich dieses Verhältniss in dem Fall, dass die Curvenschar durch eine Differentialgleichung gegeben ist, im Allgemeinen nicht berechnet werden kann, da ja der Parameter t nur durch Integration zu ermitteln ist, lässt sich doch die Forderung, dass jenes Verhältniss von τ unabhängig sein soll, in eine stets berechenbare Form bringen.

Bleiben wir bei der früher angewandten Bezeichnung:

$$\nu_0 T_0 = dt, \quad \nu_1 T_1 = d\tau,$$

so wird:

$$(\Delta_1 t)^2 = \nu_0^2, \quad \Delta_2 t = (d\nu_0)_{T_0} - \frac{\nu_0}{\varrho_1},$$

$$\frac{\Delta_2 t}{(\Delta_1 t)^2} = \frac{1}{\nu_0}\left((d \log \nu_0)_{T_0} - \frac{1}{\varrho_1}\right).$$

Die Bedingung:

$$\left(d\, \frac{\Delta_2 t}{(\Delta_1 t)^2}\right)_{T_1} = 0$$

nimmt zunächst die Form an:

$$-\frac{1}{\varrho_0}\left(d \log \nu_0)_{T_0} - \frac{1}{\varrho_1}\right) + (d \log \nu_0)_{T_0 T_1} - \left(d\, \frac{1}{\varrho_1}\right)_{T_1} = 0.$$

Aber:

$$(d \log \nu_0)_{T_0 T_1} = \left(d\, \frac{1}{\varrho_0}\right)_{T_0} - \frac{1}{\varrho_0 \varrho_1} + \frac{(d \log \nu_0)_{T_0}}{\varrho_0},$$

somit lautet das gesuchte Ergebniss:

$$\left(d\, \frac{1}{\varrho_1}\right)_{T_1} = \left(d\, \frac{1}{\varrho_0}\right)_{T_0}.$$

Man erhält dieselbe Gleichung als Bedingung dafür, dass die orthogonalen Trajectorien einer gegebenen Curvenschar ein isothermes System bilden. Die Eigenschaft, isotherm zu sein, kommt also immer gleichzeitig zwei zu einander senkrechten Curvenscharen zu oder nicht.

Schreiben wir die Bedingung isothermer Curvenscharen in der Form:

$$(d \log \nu_1)_{T_0 T_1} = (d \log \nu_0)_{T_1 T_0}$$

und ersetzen den Ausdruck rechts durch:

$$(d \log \nu_0)_{T_0 T_1} + (d \log \nu_0)_{T_1} \left((d \log \nu_1)_{T_0} - (d \log \nu_0)_{T_0}\right),$$

so folgt:

$$\left(d \log \frac{\nu_1}{\nu_0}\right)_{T_0 T_1} - (d \log \nu_0)_{T_1} \left(d \log \frac{\nu_1}{\nu_0}\right)_{T_0} = 0.$$

Die linke Seite dieser Gleichung besitzt aber den Werth:

$$\nu_1 \nu_0 \frac{\partial^2 \log \frac{\nu_1}{\nu_0}}{\partial t \partial \tau}.$$

Der Quotient $\frac{\nu_1}{\nu_0}$ ist somit gleich einer Function von t multiplicirt mit einer solchen von τ, oder, was dasselbe ist, es existiren zwei Functionen $g(t)$ und $g_0(\tau)$ derart, dass:

$$\nu_1 g(\tau) = \nu_0 g_0(t).$$

Die Differentialformen T_1 und T_0 besitzen demnach einen gemeinsamen integrirenden Factor. Nennen wir ihn $\frac{1}{\mu}$ und nehmen:

$$\frac{1}{\mu} T_1 = du, \quad \frac{1}{\mu} T_0 = dv,$$

so wird das Quadrat des Linienelements der Ebene zu

$$\mu^2(du^2 + dv^2).$$

§ 2. Einfach unendliche Curvenschar im Raume.

Eine einfach unendliche Curvenschar im Raume wird festgelegt durch Angabe der durch sie gebildeten Fläche d. h. durch Gleichungen von der Form:

$$x = f(p, q), \quad y = f_1(p, q), \quad z = f_2(p, q)$$

bei Zuhilfenahme einer Differentialgleichung von der Form:

$$(1) \qquad \alpha_{11} dp + \alpha_{12} dq = 0,$$

in der α_{11} und α_{12} Functionen von p und q bedeuten. Der Fall, dass (1) als integrirt vorausgesetzt wird, soll nicht besonders behandelt werden.

Zunächst ist die hier geltende Berechnungsart der Ableitung einer Function nach der Bogenlänge der Curven der Schar und der ihrer orthogonalen Trajectorien darzuthun.

Man setze wie üblich:

$$\sum \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 = E, \quad \sum \frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial x}{\partial q} = F, \quad \sum \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 = G$$

und ausserdem:

$$N = \alpha_{12}^2 E - 2 \alpha_{11} \alpha_{12} F + \alpha_{11}^2 G,$$

$$a_{11} = \frac{-\alpha_{11} F + \alpha_{12} E}{\sqrt{N}}, \quad a_{12} = \frac{-\alpha_{11} G + \alpha_{12} F}{\sqrt{N}},$$

$$a_{21} = \frac{\alpha_{11} \sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{N}}, \quad a_{22} = \frac{\alpha_{12} \sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{N}},$$

$$T_1 = a_{11} dp + a_{12} dq,$$
$$T_0 = a_{21} dp + a_{22} dq.$$

Die Differentialgleichung $T_0 = 0$ definirt ebenfalls unsere Curvenschar, da sich T_0 nur durch einen Factor von der linken Seite in (1) unterscheidet. Das Differential einer Function $\mathfrak{F}$ von p und q erhält die Gestalt:

$$d\mathfrak{F} = \frac{a_{22} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p} - a_{21} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} T_1 + \frac{-a_{12} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p} + a_{11} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} T_0,$$

und für die fraglichen Ableitungen nach Bogenlängen ergeben sich die Gleichungen:

$$(d\mathfrak{F})_{T_1} = \frac{a_{22} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p} - a_{21} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{\alpha_{12} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p} - \alpha_{11} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q}}{\sqrt{N}},$$

$$(d\mathfrak{F})_{T_0} = \frac{-a_{12} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p} + a_{11} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q}}{a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} = \frac{(\alpha_{11} G - \alpha_{12} F) \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p} + (\alpha_{12} E - \alpha_{11} F) \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q}}{\sqrt{N} \sqrt{EG - F^2}}.$$

Daraus folgt:

$$\sum (dx)^2_{T_1} = 1, \quad \sum (dx)^2_{T_0} = 1, \quad \sum (dx)_{T_1} (dx)_{T_0} = 0.$$

Dies zeigt, dass $(dx)_{T_1}$, $(dy)_{T_1}$, $(dz)_{T_1}$ die Richtungscosinus der Tangenten der Curven der Schar sind; ferner, dass $T_1 = 0$ die Differentialgleichung der Orthogonalschar ist, und dass die Richtungscosinus der Tangenten der Curven dieser Schar durch $(dx)_{T_0}$, $(dy)_{T_0}$, $(dz)_{T_0}$ dargestellt werden.

Bezeichnet ν_1 einen integrirenden Factor von T_1, ν_0 einen solchen von T_0 und setzt man:

$$\nu_1 T_1 = d\tau, \quad \nu_0 T_0 = dt,$$

so ergiebt sich wie im vorigen Paragraphen:

$$(d\mathfrak{F})_{T_1} = \nu_1 \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \tau}, \quad (d\mathfrak{F})_{T_0} = \nu_0 \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t},$$

$$(2) \qquad (d\mathfrak{F})_{T_1 T_0} - (d\mathfrak{F})_{T_0 T_1} = (d\mathfrak{F})_{T_1} (d \log \nu_1)_{T_0} - (d\mathfrak{F})_{T_0} (d \log \nu_0)_{T_1}.$$

Um die geometrische Bedeutung der hier auftretenden Grössen $(d \log \nu_1)_{T_0}$ und $(d \log \nu_0)_{T_1}$ zu erkennen, berücksichtige man, dass die Krümmungsaxe einer auf einer Fläche gezogenen Curve die Flächennormale in einem Punkte (A) trifft, welcher mit dem Krümmungsmittelpunkt des

durch die Tangente der Curve gelegten Normalschnitts zusammenfällt, und dass sie die Tangentialebene der Fläche in einem Punkte (B) schneidet, den man den Mittelpunkt der geodätischen Krümmung der Curve nennt. Fassen wir eine Curve $T_0 = 0$ in's Auge und nennen h_{T_1} die Abscisse des entsprechenden Punktes (A) in Bezug auf den Flächenpunkt (x, y, z), sowie r den Halbmesser der ersten Krümmung der Curve, so wird:

$$\frac{r}{h_{T_1}} = X \cos a + Y \cos b + Z \cos c,$$

falls X, Y, Z die Richtungscosinus der Flächennormalen, $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$ die der Hauptnormalen der Curve sind. Nun hat man aber nach der ersten Frenet'schen Formel:

$$\cos a = r(dx)_{T_1^2}, \quad \cos b = r(dy)_{T_1^2}, \quad \cos c = r(dz)_{T_1^2},$$

folglich besteht für die Normalkrümmung $\frac{1}{h_{T_1}}$ die Gleichung:

$$\frac{1}{h_{T_1}} = \sum X(dx)_{T_1^2} = -\sum (dX)_{T_1}(dx)_{T_1}.$$

Nennen wir R_{T_1} die Abscisse des Punktes (B) in Bezug auf den Flächenpunkt (x, y, z), so wird:

$$\frac{r}{R_{T_1}} = (dx)_{T_0} \cos a + (dy)_{T_0} \cos b + (dz)_{T_0} \cos c.$$

Folglich besteht für die geodätische Krümmung $\frac{1}{R_{T_1}}$ die Gleichung:

$$\frac{1}{R_{T_1}} = \sum (dx)_{T_0}(dx)_{T_1^2} = -\sum (dx)_{T_1}(dx)_{T_0 T_1}.$$

Ebenso erhält man für die Normal- und geodätische Krümmung der Curven $T_1 = 0$ die Ausdrücke:

$$\frac{1}{h_{T_0}} = \sum X(dx)_{T_0^2} = -\sum (dX)_{T_0}(dx)_{T_0},$$

$$\frac{1}{R_{T_0}} = \sum (dx)_{T_1}(dx)_{T_0^2} = -\sum (dx)_{T_0}(dx)_{T_1 T_0}.$$

Aus (2) folgt aber, wenn $\mathfrak{F}$ der Reihe nach durch x, y, z ersetzt wird:

$$\sum (dx)_{T_0}(dx)_{T_1 T_0} = -(d \log v_0)_{T_1}, \quad \sum (dx)_{T_1}(dx)_{T_0 T_1} = -(d \log v_1)_{T_0}.$$

Man hat daher:

$$(3) \qquad \frac{1}{R_{T_1}} = (d \log v_1)_{T_0}, \quad \frac{1}{R_{T_0}} = (d \log v_0)_{T_1}.$$

Um die zwischen den Grössen $\frac{1}{R_{T_1}}$ und $\frac{1}{R_{T_0}}$ bestehende Differentialgleichung zu finden, nehme man in (2) die Function $\mathfrak{F}$ der Reihe nach gleich $(dx)_{T_1}$, $(dy)_{T_1}$, $(dz)_{T_1}$. Dann folgt:

$$\sum (dx)_{T_0}(dx)_{T_1^2 T_0} - \sum (dx)_{T_0} dx)_{T_1 T_0 T_1} = \left(\frac{1}{R_{T_1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_{T_0}}\right)^2.$$

Aber:

$$\sum (dx)_{T_0}(dx)_{T_1 T_0} = -\sum (dx)_{T_1^2}(dx)_{T_0^2} + \left(d\,\frac{1}{R_{T_1}}\right)_{T_0},$$

$$\sum (dx)_{T_0}(dx)_{T_1 T_0 T_1} = -\sum (dx)_{T_1 T_0}(dx)_{T_0 T_1} - \left(d\,\frac{1}{R_{T_0}}\right)_{T_1}.$$

Es erübrigt also noch die Bedeutung des Ausdrucks:

$$\sum (dx)_{T_1^2}(dx)_{T_0^2} - \sum (dx)_{T_1 T_0}(dx)_{T_0 T_1}$$

zu ermitteln. Man nehme abkürzend:

$$\frac{1}{h_{T_1}} = \Theta, \quad \sum X(dx)_{T_1 T_0} = \Theta', \quad \frac{1}{h_{T_0}} = \Theta''.$$

Da nach (2):

$$\sum X(dx)_{T_1 T_0} = \sum X(dx)_{T_0 T_1},$$

so ergiebt sich folgendes Gleichungssystem:

$$(dx)_{T_1^2} = \frac{(dx)_{T_0}}{R_{T_1}} + \Theta X, \qquad (dx)_{T_1 T_0} = -\frac{(dx)_{T_0}}{R_{T_0}} + \Theta' X,$$

$$(dx)_{T_0^2} = \frac{(dx)_{T_1}}{R_{T_0}} + \Theta'' X, \quad (dx)_{T_0 T_1} = -\frac{(dx)_{T_1}}{R_{T_1}} + \Theta' X.$$

Dies zeigt zunächst, dass:

$$\Theta\Theta'' - \Theta'^2 = \sum (dx)_{T_1^2}(dx)_{T_0^2} - \sum (dx)_{T_1 T_0}(dx)_{T_0 T_1}.$$

Für den Krümmungsradius ϱ eines Normalschnitts hat man bekanntlich die Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{X d^2x + Y d^2y + Z d^2z}{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Sie wandelt sich bei Anwendung des vorigen Systems um in:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{\Theta T_1^2 + 2\Theta' T_1 T_2 + \Theta'' T_2^2}{T_1^2 + T_2^2},$$

folglich besteht für das Gauss'sche Krümmungsmass der Fläche die Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \Theta\Theta'' - \Theta'^2.$$

Wir erhalten daher die gesuchte Differentialgleichung in der Gestalt:

$$(4) \qquad \left(d\,\frac{1}{R_{T_1}}\right)_{T_0} + \left(d\,\frac{1}{R_{T_0}}\right)_{T_1} = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} + \left(\frac{1}{R_{T_1}}\right)^2 + \left(\frac{1}{R_{T_0}}\right)^2.$$

Man kann die betrachtete Curvenschar auffassen als das mittels der Punktzuordnung:

$$x = f(p, q), \quad y = f(p, q), \quad z = f(p, q)$$

auf die Fläche (x, y, z) geworfene Bild der durch die Differentialgleichung (1) in der p, q-Ebene festgelegten Curvenschar.

Nimmt man eine zweite Fläche (x_1, y_1, z_1) und betrachtet das mittels der Punktzuordnung:

$$x_1 = g(p, q), \quad y_1 = g_1(p, q), \quad z_1 = g_2(p, q)$$

auf diese Fläche geworfene Bild derselben ebenen Curvenschar, so erhält man an Stelle von T_1 und T_0 zwei neue Differentialformen T_1' und T_0', welche aus den alten dadurch hervorgehen, dass E, F, G der Reihe nach ersetzt werden durch:

$$E_1 = \sum \left(\frac{\partial x_1}{\partial p}\right)^2, \quad F_1 = \sum \frac{\partial x_1}{\partial p} \frac{\partial x_1}{\partial q}, \quad G_1 = \sum \left(\frac{\partial x_1}{\partial q}\right)^2.$$

Für den Punkt der Fläche (x_1, y_1, z_1), welcher dem Punkte (p, q) der p, q-Ebene entspricht, werde die geodätische Krümmung der Curve $T_0' = 0$ oder $T_1' = 0$ mit $\frac{1}{R_{T_1'}}$ oder $\frac{1}{R_{T_0'}}$, das Krümmungsmass mit $\frac{1}{\varrho_1' \varrho_2'}$ bezeichnet. Nimmt man nun das Bestehen der Gleichungen an:

$$E = E_1, \quad F = F_1, \quad G = G_1,$$

so wird:

$$T_1' = T_1, \quad T_0' = T_0, \quad (d\mathfrak{F})_{T_1'} = (d\mathfrak{F})_{T_1}, \quad (d\mathfrak{F})_{T_0'} = (d\mathfrak{F})_{T_0}.$$

Damit folgt aber aus (3):

$$\frac{1}{R_{T_1}} = \frac{1}{R_{T_1'}}, \quad \frac{1}{R_{T_0}} = \frac{1}{R_{T_0'}}$$

und nach (4) entsteht:

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{1}{\varrho_1' \varrho_2'}.$$

Hierin spricht sich die bekannte Thatsache aus, dass die geodätische Krümmung und das Krümmungsmass *Biegungsinvarianten* sind.

Es sollen jetzt die Lamé'schen Differentialparameter für eine Fläche definirt werden. Unter Beibehaltung der bisherigen Bedeutung von x, y, z als der Coordinaten der Punkte der betrachteten Fläche und von X, Y, Z als der Richtungscosinus ihrer Normalen nehme man, mit r eine neue Veränderliche bezeichnend:

$$u = x + rX, \quad v = y + rY, \quad w = z + rZ.$$

Hierdurch werden umgekehrt die unabhängigen Veränderlichen p, q, r als Functionen der rechtwinkligen Coordinaten u, v, w definirt.

Ist:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial p} & \frac{\partial u}{\partial q} & X \\ \frac{\partial v}{\partial p} & \frac{\partial v}{\partial q} & Y \\ \frac{\partial w}{\partial p} & \frac{\partial w}{\partial q} & Z \end{vmatrix},$$

so hat man bekanntlich:

$$J\frac{\partial p}{\partial u} = \frac{\partial v}{\partial q} Z - \frac{\partial w}{\partial q} Y, \quad J\frac{\partial q}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial p} Y - \frac{\partial v}{\partial p} Z.$$

Eine Function $\mathfrak{F}$ von p und q wird jetzt auch eine solche von u, v, w. Wir bezeichnen die unter der Voraussetzung $r = 0$ gebildeten Ableitungen $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u}, \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial v}, \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial u^2}$ u. s. f. mit $\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}, \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}, \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x^2}$ u. s. f. Für $r = 0$ erhält J den Werth $\sqrt{EG - F^2}$, und weiter folgt:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{G\frac{\partial x}{\partial p} - F\frac{\partial x}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = \frac{E\frac{\partial x}{\partial q} - F\frac{\partial x}{\partial p}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Da:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p} = \frac{(\alpha_{12} E - \alpha_{11} F)(d\mathfrak{F})_{T_1} + \alpha_{11}\sqrt{EG - F^2}(d\mathfrak{F})_{T_0}}{\sqrt{N}},$$

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q} = \frac{(\alpha_{12} F - \alpha_{11} G)(d\mathfrak{F})_{T_1} + \alpha_{12}\sqrt{EG - F^2}(d\mathfrak{F})_{T_0}}{\sqrt{N}},$$

so ist:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\alpha_{12}}{\sqrt{N}}(dx)_{T_1} + \frac{\alpha_{11} G - \alpha_{12} F}{\sqrt{N}\sqrt{EG - F^2}}(dx)_{T_0},$$

$$\frac{\partial q}{\partial x} = \frac{-\alpha_{11}}{\sqrt{N}}(dx)_{T_1} + \frac{\alpha_{12} E - \alpha_{11} F}{\sqrt{N}\sqrt{EG - F^2}}(dx)_{T_0},$$

oder:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = (dp)_{T_1}(dx)_{T_1} + (dp)_{T_0}(dx)_{T_0}, \quad \frac{\partial q}{\partial x} = (dq)_{T_1}(dx)_{T_1} + (dq)_{T_0}(dx)_{T_0},$$

somit:

$$\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} = (d\mathfrak{F})_{T_1}(dx)_{T_1} + (d\mathfrak{F})_{T_0}(dx)_{T_0}.$$

Für den Lamé'schen ersten Differentialparameter

$$\sqrt{\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial w}\right)^2}$$

besteht folglich, wenn $r = 0$, d. h. längs der Fläche (x, y, z) die Gleichung:

$$(\Delta_1 \mathfrak{F})^2 = (d\mathfrak{F})^2_{T_1} + (d\mathfrak{F})^2_{T_0} = \nu_1^2\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial \tau}\right)^2 + \nu_0^2\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial t}\right)^2.$$

Nehmen wir hier $\mathfrak{F} = t$, so wird einerseits:

$$\Delta_1 t = \nu_0,$$

andererseits, da:

$$\alpha_{11} : \alpha_{12} = \frac{\partial t}{\partial p} : \frac{\partial t}{\partial q},$$

entsteht:

$$(\Delta_1 t)^2 = (dt)^2_{T_0} = \frac{G\left(\frac{\partial t}{\partial p}\right)^2 - 2F\frac{\partial t}{\partial p}\frac{\partial t}{\partial q} + E\left(\frac{\partial t}{\partial q}\right)^2}{EG - F^2}.$$

Dies ist die bekannte Gleichung für den **Beltrami**'schen ersten Differentialparameter. Aus dem Umstand, dass er gleich ν_0 ist, erkennt man die orthogonalen Trajectorien der Curvenschar $T_0 = 0$ als geodätische Linien der Fläche (x, y, z), falls $\Delta_1 t$ nur von t abhängt, weil dann $\frac{1}{R_{T_0}}$ verschwindet.

Um den zweiten **Lamé**'schen Differentialparameter einer Function $\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial v^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial w^2}$ für $r = 0$ zu bilden, berücksichtige man, dass:

$$\frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x^2} = (dx)_{T_1}\{(d\mathfrak{F})_{T_1^2}(dx)_{T_1} + (d\mathfrak{F})_{T_0 T_1}(dx)_{T_0} + (d\mathfrak{F})_{T_1}(dx)_{T_1^2} + (d\mathfrak{F})_{T_0}(dx)_{T_0 T_1}\}$$
$$+ (dx)_{T_0}\{(d\mathfrak{F})_{T_1 T_0}(dx)_{T_1} + (d\mathfrak{F})_{T_0^2}(dx)_{T_0} + (d\mathfrak{F})_{T_1}(dx)_{T_1 T_0} + (d\mathfrak{F})_{T_0}(dx)_{T_0^2}\}.$$

Daraus folgt für den zweiten **Lamé**'schen Differentialparameter längs der Fläche (x, y, z) die Gleichung:

$$\Delta_2 \mathfrak{F} = (d\mathfrak{F})_{T_1^2} + (d\mathfrak{F})_{T_0^2} - \frac{(d\mathfrak{F})_{T_0}}{R_{T_1}} - \frac{(d\mathfrak{F})_{T_1}}{R_{T_0}}.$$

Für $\mathfrak{F} = t$ besteht, da $(dt)_{T_0} = \nu_0$, die Beziehung:

$$\Delta_1 t = \nu_0 (d \log \nu_0)_{T_0} - \frac{\nu_0}{R_{T_1}}.$$

Nun ist:

$$a_{11} = \frac{E\frac{\partial t}{\partial q} - F\frac{\partial t}{\partial p}}{\nu_0 \sqrt{EG - F^2}}, \quad a_{12} = \frac{F\frac{\partial t}{\partial q} - G\frac{\partial t}{\partial p}}{\nu_0 \sqrt{EG - F^2}}.$$

Hier werde zur Abkürzung $a_{11}\nu_0 = \alpha$, $a_{12}\nu_0 = -\beta$ gesetzt. Dann hat man allgemein:

$$(d\mathfrak{F})_{T_0} = \frac{\alpha\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q} + \beta\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p}}{\nu_0 \sqrt{EG - F^2}}.$$

Da ferner:

$$\frac{1}{R_{T_1}} = \frac{\frac{\partial a_{12}}{\partial p} - \frac{\partial a_{11}}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}} = \frac{-\frac{\partial \beta}{\partial p} - \frac{\partial \alpha}{\partial q}}{\nu_0 \sqrt{EG - F^2}} + \frac{\beta\frac{\partial \log \nu_0}{\partial p} + \alpha\frac{\partial \log \nu_0}{\partial q}}{\nu_0 \sqrt{EG - F^2}}$$

$$= -\frac{\frac{\partial \beta}{\partial p} + \frac{\partial \alpha}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}} + (d \log \nu_0)_{T_0},$$

so folgt:

$$\Delta_2 t = \frac{\frac{\partial \beta}{\partial p} + \frac{\partial \alpha}{\partial q}}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Dies ist die bekannte Gleichung für den zweiten **Beltrami**'schen Differentialparameter.

Man zeigt wie im § 1 bei ebener Curvenschar, dass, wenn der Quotient $\frac{\Delta_2 t}{(\Delta_1 t)^2}$ nur von t abhängt, die betrachtete Schar also isotherm ist, die Beziehung besteht:

$$\left(d\,\frac{1}{R_{T_1}}\right)_{T_1} = \left(d\,\frac{1}{R_{T_0}}\right)_{T_0},$$

wodurch sich auch die Orthogonalschar als isotherm herausstellt; dass ferner T_1 und T_0 jetzt einen gemeinsamen integrirenden Factor $\frac{1}{\mu}$ besitzen, mit Hülfe dessen dem Quadrat des Linienelements der Fläche die Gestalt:

$$ds^2 = \mu^2(dt^2 + d\tau^2)$$

gegeben werden kann.

Zweiter Theil.

Doppelt unendliche Curvenschar, festgelegt durch endliche Gleichungen.

§ 3. Orthogonale Trajectorien. Normalschar. Besondere Schar.

Wir betrachten eine doppelt unendliche Curvenschar im Raume und nehmen sie als gegeben an durch endliche Gleichungen von der Form:

$$(1) \qquad x = f(p, q, r), \quad y = f_1(p, q, r), \quad z = f_2(p, q, r).$$

Hier sollen p und q die Bedeutung von Parametern besitzen, sodass längs jeder Einzelcurve der Schar nur r sich ändert, während p und q ihre Werthe beibehalten. In Betreff der Functionen f, f_1, f_2 ist vorauszusetzen, dass die Determinante:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial p} & \frac{\partial x}{\partial q} & \frac{\partial x}{\partial r} \\ \frac{\partial y}{\partial p} & \frac{\partial y}{\partial q} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial z}{\partial p} & \frac{\partial z}{\partial q} & \frac{\partial z}{\partial r} \end{vmatrix}$$

im Allgemeinen von Null verschieden ist, da man es sonst mit einer einfach unendlichen Curvenschar zu thun hat.

Bei dieser Annahme bestimmt die Gleichung $J = 0$ unter Hinzunahme von (1) eine Fläche, welche als der Ort der Punkte zu be-

trachten ist, in denen eine Curve der Schar von einer unendlich benachbarten geschnitten wird. Man hat diese Fläche die *Brennfläche* der Curvenschar genannt. (Darboux, Leçons Bd. II. S. 5.)

Wir erforschen die Krümmungsverhältnisse der Schar mit Hülfe ihrer orthogonalen Trajectorien.

Es sei eine zweite doppelt unendliche Curvenschar festgelegt durch Gleichungen von der Form:

$$x = g(p', q', t), \quad y = g_1(p', q', t), \quad z = g_2(p', q', t),$$

in denen p', q' Parameter bedeuten sollen.

Wann ist diese Curvenschar aus laùter orthogonalen Trajectorien der ersten Schar gebildet? Man bezeichne mit ξ, η, ζ die Richtungscosinus der Tangenten der Curven $p =$ Const., $q =$ Const. Dann hat man:

$$\xi = \frac{\frac{\partial x}{\partial r}}{\sqrt{a_{33}}}, \quad \eta = \frac{\frac{\partial y}{\partial r}}{\sqrt{a_{33}}}, \quad \zeta = \frac{\frac{\partial z}{\partial r}}{\sqrt{a_{33}}}, \tag{2}$$

wo:

$$a_{33} = \sum \left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2.$$

Die Curven der zweiten Schar sind orthogonale Trajectorien der ersten Schar, falls stets:

$$\xi \frac{\partial x}{\partial t} + \eta \frac{\partial y}{\partial t} + \zeta \frac{\partial z}{\partial t} = 0,$$

oder, bei Anwendung der Bezeichnung:

$$a_{13} = \sum \frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial x}{\partial r}, \quad a_{23} = \sum \frac{\partial x}{\partial q} \frac{\partial x}{\partial r},$$

falls:

$$a_{13} \frac{\partial p}{\partial t} + a_{23} \frac{\partial q}{\partial t} + a_{33} \frac{\partial r}{\partial t} = 0.$$

Wir haben daher die Beziehung:

$$a_{13}\, dp + a_{23}\, dq + a_{33}\, dr = 0 \tag{3}$$

als Differentialgleichung der orthogonalen Trajectorien der gegebenen Curvenschar zu betrachten.

Die linke Seite von (3) kann die Eigenschaft haben, durch Multiplication mit einem geeigneten Factor μ in das Differential einer Function von p, q, r überzugehen. Die Bedingung hierfür ist:

$$a_{13}\left(\frac{\partial a_{23}}{\partial r} - \frac{\partial a_{33}}{\partial q}\right) + a_{23}\left(\frac{\partial a_{33}}{\partial p} - \frac{\partial a_{13}}{\partial r}\right) + a_{33}\left(\frac{\partial a_{13}}{\partial q} - \frac{\partial a_{23}}{\partial p}\right) = 0. \tag{4}$$

Besteht diese Bedingung, so hat man:

$$\mu\,(a_{13}\, dp + a_{23}\, dq + a_{33}\, dr) = d\tau$$

oder:

$$dr = \frac{d\tau}{\mu a_{33}} - \frac{a_{13}}{a_{33}} dp - \frac{a_{23}}{a_{33}} dq.$$

Wir fassen hier r als Function von τ, p und q auf und denken uns diese Function in (1) für r gesetzt. Die Gleichungen (1) können dann als Gleichungen einer Flächenschar betrachtet werden, deren Parameter τ ist. Da jetzt:

$$\frac{\partial r}{\partial p} = -\frac{a_{13}}{a_{33}}, \quad \frac{\partial r}{\partial q} = -\frac{a_{23}}{a_{33}},$$

so erhält man für die vollständigen partiellen Ableitungen von x nach p und q die Ausdrücke:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right) = \frac{\partial x}{\partial p} - \frac{a_{13}}{a_{33}} \frac{\partial x}{\partial r}, \quad \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right) = \frac{\partial x}{\partial q} - \frac{a_{23}}{a_{33}} \frac{\partial x}{\partial r}.$$

Dies zeigt aber, dass:

$$\sum \xi \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right) = 0, \quad \sum \xi \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right) = 0,$$

d. h. die Curven der Schar sind die orthogonalen Trajectorien einer Flächenschar. Wir nennen, falls die Gleichung (4) besteht, die Curvenschar eine *Normalschar*.

Für die Differentiation längs einer orthogonalen Trajectorie der Curvenschar ist eine gesonderte Bezeichnung einzuführen. Es sei $\mathfrak{F}$ eine Function von p, q, r, sodass:

$$d\mathfrak{F} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p} dp + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q} dq + \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial r} dr.$$

Wird hier das Bestehen von (3) vorausgesetzt, so soll statt $d\mathfrak{F}$ geschrieben werden $\delta \mathfrak{F}$. Da in (3) das Differential dr mit einem im Allgemeinen von Null verschiedenen Coefficienten multiplicirt ist, hat man:

$$\delta \mathfrak{F} = \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p} - \frac{a_{13}}{a_{33}} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial r}\right) dp + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q} - \frac{a_{23}}{a_{33}} \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial r}\right) dq.$$

Die hier auftretenden Factoren von dp und dq bezeichnen wir zur Abkürzung mit $\mathfrak{F}_p$ und $\mathfrak{F}_q$. Die Zuwächse der Coordinaten längs einer orthogonalen Trajectorie der Schar sind demnach:

$$\delta x = x_p\, dp + x_q\, dq, \quad \delta y = y_p\, dp + y_q\, dq, \quad \delta z = z_p\, dp + z_q\, dq,$$

wo der Quotient $\frac{dq}{dp}$ als eine Function von p, q, r anzusehen ist.

Da:

$$\sum \xi x_p = 0, \quad \sum \xi x_q = 0,$$

so erhält man für die Richtungscosinus ξ, η, ζ, wenn:

$$\sum x_p^2 = E, \quad \sum x_p x_q = F, \quad \sum x_q^2 = G$$

gesetzt wird, die Ausdrücke:

$$\xi = \frac{y_p z_q - z_p y_q}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \eta = \frac{z_p x_q - x_p z_q}{\sqrt{EG - F^2}}, \quad \zeta = \frac{x_p y_q - x_q y_p}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Die oben betrachtete Determinante J lässt sich so schreiben:

$$\sqrt{a_{33}} \begin{vmatrix} x_p & x_q & \xi \\ y_p & y_q & \eta \\ z_p & z_q & \zeta \end{vmatrix},$$

sodass:

$$\frac{J\xi}{\sqrt{a_{33}}} = y_p z_q - z_p y_q, \quad \frac{J\eta}{\sqrt{a_{33}}} = z_p x_q - x_p z_q, \quad \frac{J\zeta}{\sqrt{a_{33}}} = x_p y_q - y_p x_q.$$

Ist also J von Null verschieden, so auch $EG - F^2$.

Unter einem *regulären Punkt* der Curvenschar wollen wir zunächst einen solchen Punkt (x, y, z) verstehen, für den weder a_{33} noch $EG - F^2$ verschwindet. Er ist also ein regulärer Punkt der Einzelcurven, der er angehört, und er liegt nicht auf der Brennfläche der Curvenschar.

Beim Fortschreiten auf einer orthogonalen Trajectorie trifft man auf eine der Tangente (ξ, η, ζ) benachbarte Tangente $(\xi + \delta\xi, \eta + \delta\eta, \zeta + \delta\zeta)$, wo:

$$\delta\xi = \xi_p dp + \xi_q dq, \quad \delta\eta = \eta_p dp + \eta_q dq, \quad \delta\zeta = \zeta_p dp + \zeta_q dq,$$

$$\xi_p = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial r} - \frac{a_{13}}{a_{33}}\frac{\partial^2 x}{\partial r^2}\right) - \frac{\xi}{2a_{33}}\left(\frac{\partial a_{33}}{\partial p} - \frac{a_{13}}{a_{33}}\frac{\partial a_{33}}{\partial r}\right),$$

$$\xi_q = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial q\,\partial r} - \frac{a_{23}}{a_{33}}\frac{\partial^2 x}{\partial r^2}\right) - \frac{\xi}{2a_{33}}\left(\frac{\partial a_{33}}{\partial q} - \frac{a_{23}}{a_{33}}\frac{\partial a_{33}}{\partial r}\right).$$

Hier ist der Fall hervorzuheben, in dem sich unter den fraglichen Fortschreitungsrichtungen stets eine befindet, für welche die Tangente (ξ, η, ζ) sich parallel bleibt, sodass $\delta\xi, \delta\eta, \delta\zeta$ verschwinden. Setzen wir:

$$\sum \xi_p^2 = H, \quad \sum \xi_p \xi_q = \Phi, \quad \sum \xi_q^2 = \Psi,$$

so ist im betrachteten Fall die Differenz $H\Psi - \Phi^2$ für jedes Werthsystem p, q, r gleich Null. Eine Curvenschar mit dieser Eigenschaft soll eine *besondere* genannt werden, während bei einer *allgemeinen* Curvenschar jene Differenz als im Allgemeinen von Null verschieden vorausgesetzt wird.

Die Erzeugung besonderer Curvenscharen erhellt aus folgender Ueberlegung. Eine doppelt unendliche Schar von Curven lässt sich auf mannigfache Weise in eine stetige Reihe einfach unendlicher Curvenscharen zerlegen, z. B. durch die Annahme $q =$ Const. In einer besonderen doppelt unendlichen Curvenschar muss nun eine solche Zer-

legung möglich sein, dass in jeder Einzelschar der Reihe jede Normalebene einer Curve zugleich Normalebene jeder anderen Curve derselben Einzelschar ist. Curven im Raume mit gemeinsamen Normalebenen sollen *parallele* Curven genannt werden. Wir bestimmen zunächst die Coordinaten einer zu einer gegebenen Curve parallelen Curve. Die Coordinaten x_0, y_0, z_0 der gegebenen Curve seien Functionen von r, ferner bezeichne $\frac{1}{\varrho}$ oder $\frac{1}{\varrho'}$ die erste oder zweite Krümmung der Curve, $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$; $\cos a$, $\cos b$, $\cos c$; $\cos\lambda$, $\cos\mu$, $\cos\nu$ seien die Richtungscosinus der Tangente, Haupt- und Binormale. Wählt man die positiven Theile dieser Geraden so, dass:

$$\cos a = \cos\beta\cos\nu - \cos\gamma\cos\mu,\quad \cos b = \cos\gamma\cos\lambda - \cos\alpha\cos\nu,$$
$$\cos c = \cos\alpha\cos\mu - \cos\beta\cos\lambda$$

und setzt:

$$\sigma = \sqrt{\sum\left(\frac{\partial x_0}{\partial r}\right)^2},$$

so nehmen die Frenet'schen Formeln (J. Knoblauch, Einleitung in die allgemeine Theorie der krummen Flächen S. 241) die Gestalt an:

$$\frac{d\cos\alpha}{dr} = \frac{\sigma\cos a}{\varrho},\quad \frac{d\cos\lambda}{dr} = \frac{\sigma\cos a}{\varrho'},\quad \frac{d\cos a}{dr} = -\sigma\left(\frac{\cos\alpha}{\varrho} + \frac{\cos\lambda}{\varrho'}\right).$$

Die zu dem Punkte $P\,(x_0, y_0, z_0)$ gehörende Normalebene der ersten Curve schneide die zweite im Punkte $Q\,(x, y, z)$. Man hat dann:

$$x = x_0 + m\,(\cos\varphi\cos a + \sin\varphi\cos\lambda),$$
$$y = y_0 + m\,(\cos\varphi\cos b + \sin\varphi\cos\mu),$$
$$z = z_0 + m\,(\cos\varphi\cos c + \sin\varphi\cos\nu).$$

Hier bedeutet m die Entfernung der Punkte P, Q, und φ ist der Winkel, den diese Entfernung mit der Hauptnormalen der Curve (x_0, y_0, z_0) einschliesst.

Da:

$$\frac{dx}{dr} = \left(1 - \frac{m\cos\varphi}{\varrho}\right)\sigma\cos\alpha + \left(\frac{dm\cos\varphi}{dr} + \frac{m\sigma\sin\varphi}{\varrho'}\right)\cos a + \left(\frac{dm\sin\varphi}{dr} - \frac{m\sigma\cos\varphi}{\varrho'}\right)\cos\lambda,$$

so sind die fraglichen Curven parallel, wenn:

$$\frac{dm}{dr}\cos\varphi - m\sin\varphi\left(\frac{d\varphi}{dr} - \frac{\sigma}{\varrho'}\right) = 0$$

und:

$$\frac{dm}{dr}\sin\varphi + m\cos\varphi\left(\frac{d\varphi}{dr} - \frac{\sigma}{\varrho'}\right) = 0,$$

d. h. wenn:

$$\frac{dm}{dr} = 0 \text{ und } \frac{d\varphi}{dr} = \frac{\sigma}{\varrho'}.$$

Bezeichnet r_0 einen festen Werth von r, so wird demnach

$$\varphi = \int_{r_0}^{r} \frac{\sigma}{\varrho} dr + p.$$

Man betrachte nun p als veränderlich und m als Function von p. Dann stellen x, y, z die Coordinaten einer Fläche dar. Die Curven $p =$ Const., $r =$ Const. sind die Krümmungslinien der Fläche, ausserdem sind die Curven $r =$ Const. ebene geodätische Linien derselben.

Die Curven $p =$ Const. bilden eine Einzelschar in einer besonderen Curvenschar, wenn man für x_0, y_0, z_0 Functionen von r und dem Parameter q nimmt, für m eine Function von p und q, und für φ das Integral $\int_{r_0}^{r} \frac{\sigma}{\varrho} dr$ vermehrt um eine Function von p und q. Jetzt sind x, y, z die Coordinaten einer doppelt unendlichen Curvenschar, bei der die Grössen:

$$\xi = \cos\alpha, \quad \eta = \cos\beta, \quad \zeta = \cos\gamma$$

nur von q und r abhängen. Da aber:

$$a_{13} = \left(1 - \frac{m\cos\varphi}{\varrho}\right)\sigma \sum \cos\alpha \left(\frac{\partial m\cos\varphi}{\partial p}\cos a + \frac{\partial m\sin\varphi}{\partial p}\cos\lambda\right) = 0,$$

so verschwinden ξ_p, η_p, ζ_p und damit $H\Psi - \Phi^2$.

Die Normalebenen der Curven einer besonderen Schar bilden eine doppelt unendliche Mannigfaltigkeit und umhüllen eine Fläche.

§ 4. Normalkrümmung orthogonaler Trajectorien. Isotrope Curvenschar. Krümmungslinien erster und zweiter Art.

Wir fassen wie stets im Folgenden einen regulären Punkt $P(x, y, z)$ der Curvenschar ins Auge. Eine durch ihn hindurchgehende orthogonale Trajectorie der Schar besitzt eine zu P gehörende Krümmungsaxe, die den Mittelpunkt Q ihrer ersten Krümmung trifft und parallel ist der Binormalen der Trajectorie. Sie schneide die Tangente (ξ, η, ζ) im Punkte R. Ist ϱ wieder der Halbmesser der ersten Krümmung der Trajectorie, ϱ_1 die Abscisse von R in Bezug auf Q, h die Abscisse von R in Bezug auf P, so hat man bei Anwendung derselben Bezeichnungen, wie im vorigen Paragraphen:

$$h\xi = \varrho\cos a + \varrho_1\cos\lambda, \quad h\eta = \varrho\cos b + \varrho_1\cos\mu, \quad h\zeta = \varrho\cos c + \varrho_1\cos\nu,$$

d. h.

$$\frac{1}{h} = \sum \xi \frac{\cos a}{\varrho}.$$

Die erste Frenet'sche Formel ergiebt aber:

$$\frac{\cos a}{\varrho} = \frac{\delta \cos \alpha}{\delta s},$$

falls:

$$\delta s^2 = \delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2.$$

Da ferner:

$$\sum \xi \, \delta \cos \alpha = -\sum \cos \alpha \, \delta \xi,$$

so entsteht:

$$(1) \qquad \frac{1}{h} = -\frac{\delta x \, \delta \xi + \delta y \, \delta \eta + \delta z \, \delta \zeta}{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2}.$$

Die Grösse $\frac{1}{h}$ wollen wir die *Normalkrümmung* der betrachteten Trajectorie nennen. Man kann dieselbe auch definiren als den Krümmungsradius einer ebenen, orthogonalen Trajectorie im Punkt P, deren Ebene sowohl die Tangente (ξ, η, ζ), wie die Tangente $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ enthält.

Bei Einführung der Bezeichnungen:

$$e = \sum \xi_p x_p, \quad f = \sum \xi_p x_q, \quad f' = \sum \xi_q x_p, \quad g = \sum \xi_q x_q$$

ergiebt sich:

$$(2) \qquad \frac{1}{h} = -\frac{e \, dp^2 + (f + f') \, dp \, dq + g \, dq^2}{E \, dp^2 + 2 F \, dp \, dq + G \, dq^2}.$$

Wir weisen zunächst Beziehungen zwischen den hier auftretenden Coefficienten nach. Da:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} \frac{\partial x}{\partial r},$$

so folgt:

$$\xi_p = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial r \, \partial p} - \frac{a_{13}}{a_{33}} \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} \right) + \frac{\partial x}{\partial r} \left(\frac{1}{\sqrt{a_{33}}} \right)_p,$$

$$\xi_q = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} \left(\frac{\partial^2 x}{\partial r \, \partial q} - \frac{a_{23}}{a_{33}} \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} \right) + \frac{\partial x}{\partial r} \left(\frac{1}{\sqrt{a_{33}}} \right)_q.$$

Aber:

$$\frac{\partial x_p}{\partial r} = \frac{\partial^2 x}{\partial r \, \partial p} - \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial \frac{a_{13}}{a_{33}}}{\partial r} - \frac{a_{13}}{a_{33}} \frac{\partial^2 x}{\partial r^2},$$

$$\frac{\partial x_q}{\partial r} = \frac{\partial^2 x}{\partial r \, \partial q} - \frac{\partial x}{\partial r} \frac{\partial \frac{a_{23}}{a_{33}}}{\partial r} - \frac{a_{23}}{a_{33}} \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}.$$

Setzt man nun allgemein für eine beliebige Function φ:

$$g_0(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}} \frac{\partial \varphi}{\partial r},$$

so entsteht:

$$(3)\qquad \begin{cases} \xi_p = g_0(x_p) + \xi\left(\dfrac{\partial \frac{a_{13}}{a_{33}}}{\partial r} - \dfrac{1}{2}(\log a_{33})_p\right), \\[2ex] \xi_q = g_0(x_q) + \xi\left(\dfrac{\partial \frac{a_{23}}{a_{33}}}{\partial r} - \dfrac{1}{2}(\log a_{33})_q\right), \end{cases}$$

folglich:

$$(4)\qquad e = \frac{1}{2}g_0(E), \quad f + f' = g_0(F), \quad g = g_0(G).$$

Man hat ferner:

$$f = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}}\left\{\frac{\partial a_{23}}{\partial p} - \sum \frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q}\frac{\partial x}{\partial r} - \frac{a_{13}}{a_{33}}\left(\frac{\partial a_{23}}{\partial r} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{33}}{\partial q}\right) - \frac{a_{23}}{2a_{33}}\left(\frac{\partial a_{33}}{\partial p} - \frac{a_{13}}{a_{33}}\frac{\partial a_{33}}{\partial r}\right)\right\},$$

$$f' = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}}\left\{\frac{\partial a_{13}}{\partial q} - \sum \frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q}\frac{\partial x}{\partial r} - \frac{a_{13}}{2a_{33}}\left(\frac{\partial a_{33}}{\partial q} - \frac{a_{13}}{a_{33}}\frac{\partial a_{33}}{\partial r}\right) - \frac{a_{23}}{a_{33}}\left(\frac{\partial a_{13}}{\partial r} - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{33}}{\partial p}\right)\right\},$$

d. h.

$$(4a)\qquad f - f' = -\frac{1}{a_{33}\sqrt{a_{33}}}\left\{a_{13}\left(\frac{\partial a_{23}}{\partial r} - \frac{\partial a_{33}}{\partial q}\right) + a_{23}\left(\frac{\partial a_{33}}{\partial p} - \frac{\partial a_{13}}{\partial r}\right) + a_{33}\left(\frac{\partial a_{13}}{\partial q} - \frac{\partial a_{23}}{\partial p}\right)\right\}.$$

Die Gleichung $f = f'$ besagt also dasselbe, wie die Gleichung (4) des vorigen Paragraphen, dass nämlich die betrachtete Curvenschar eine Normalschar ist.

Die Grösse $\frac{1}{h}$ kann die Eigenschaft haben, sich für alle durch den Punkt P gehenden orthogonalen Trajectorien nicht zu ändern. Die hierzu nöthigen Bedingungen sind:

$$(5)\qquad e : f + f' : g = E : 2F : G.$$

Sind diese Bedingungen beständig erfüllt, so nennen wir die Curvenschar eine *isotrope*. Es bilden z. B. diejenigen Curven, deren Normalen mit den Geraden eines linearen Complexes zusammenfallen, eine isotrope Schar. Nimmt man die Axe des Complexes zur z-Axe, so werden die fraglichen Curven, falls der Complex ein specieller ist, lauter Kreise, deren Ebenen senkrecht zur z-Axe, deren Mittelpunkte in der z-Axe liegen. Diese Kreise sind die orthogonalen Trajectorien des durch die z-Axe gelegten Ebenenbüschels.

Ist aber der Complex kein specieller, so werden die fraglichen Curven isogonale Trajectorien der Erzeugenden von Kreiscylindern, und man hat:

$$x = p\sin\frac{r}{m} + q\cos\frac{r}{m}, \quad y = -p\cos\frac{r}{m} + q\sin\frac{r}{m}, \quad z = r,$$

wo m eine beliebige Constante bedeutet. Hier zeigt eine einfache Rechnung, dass:

$$e = f + f' = g = 0.$$

Wir schliessen isotrope Curvenscharen von der Betrachtung aus und legen einem regulären Punkt einer nicht isotropen Curvenschar die weitere Bedingung auf, dass für ihn die Gleichungen (5) nicht erfüllt sind. Dann besitzt die Grösse $\frac{1}{h}$ einen grössten Werth $\frac{1}{h_1}$ und einen kleinsten Werth $\frac{1}{h_2}$; diese Werthe *(Hauptnormalkrümmungen)* sind die Wurzeln der Gleichung:

$$(6)\quad \frac{EG - F^2}{h^2} + \frac{1}{h}(eG - (f + f')F + gE) + eg - \left(\frac{f + f'}{2}\right)^2 = 0,$$

und sie gehören zu orthogonalen Trajectorien, welche durch die Gleichung:

$$(7)\quad \left(\frac{f + f'}{2}E - eF\right)dp^2 - (eG - gE)\,dp\,dq + \left(gF - \frac{f + f'}{2}G\right)dq^2 = 0$$

bestimmt sind. Wir erörtern nur den Fall, dass der Coefficient von dq^2 in (7) nicht verschwindet, da der entgegenstehende Fall keine Schwierigkeit bietet.

Man nehme $\frac{dq}{dp} = t$ und bezeichne die Wurzeln von (7) derart mit t_1 und t_2, dass:

$$\frac{1}{h_1} = -\frac{e + (f + f')t_1 + gt_1^2}{E + 2Ft_1 + Gt_1^2}.$$

Zwischen den Wurzeln t_1 und t_2 bestehen folgende Beziehungen:

$$(8)\quad \begin{cases} e + \frac{f + f'}{2}(t_1 + t_2) + gt_1t_2 = 0, \\ E + F(t_1 + t_2) + Gt_1t_2 = 0. \end{cases}$$

Mit Hülfe der letzteren findet man:

$$(F + Gt_1)(F + Gt_2) = -(EG - F^2).$$

Diese Gleichung zeigt, dass t_1 und t_2 stets reell sind, da die Grösse $EG - F^2$ stets positiv ist.

Die Richtungscosinus der Tangenten derjenigen orthogonalen Trajectorien, deren Normalkrümmung $\frac{1}{h_1}$ oder $\frac{1}{h_2}$ ist, sollen mit $\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1$ oder $\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2$ bezeichnet werden.

Setzt man:

$$V_1^2 = E + 2Ft_1 + Gt_1^2, \qquad V_2^2 = E + 2Ft_2 + Gt_2^2,$$

so wird:

$$(9)\quad \begin{cases} \varkappa_1 = \dfrac{x_p + x_q t_1}{V_1}, & \lambda_1 = \dfrac{y_p + y_q t_1}{V_1}, \quad \mu_1 = \dfrac{z_p + z_q t_1}{V_1}, \\ \varkappa_2 = \dfrac{x_p + x_q t_2}{V_2}, & \lambda_2 = \dfrac{y_p + y_q t_2}{V_2}, \quad \mu_2 = \dfrac{z_p + z_q t_2}{V_2}. \end{cases}$$

Die zweite Gleichung in (8) zeigt, dass:

$$\varkappa_1 \varkappa_2 + \lambda_1 \lambda_2 + \mu_1 \mu_2 = 0.$$

Wir haben so zwei doppelt unendliche Scharen orthogonaler Trajectorien der gegebenen Curvenschar gefunden, die ausserdem zu einander senkrecht sind. Sie sollen *Krümmungslinien erster Art* der Curvenschar genannt werden.

Diese Krümmungslinien sowohl wie die Grössen $\frac{1}{h_1}$ und $\frac{1}{h_2}$ sind unabhängig von der Wahl der Veränderlichen und der Parameter, mit Hülfe derer man die betrachtete Curvenschar festlegt. Die letztere ändert sich nämlich nicht durch die Substitution:

$$p = \psi(p_1, q_1), \quad q = \psi_1(p_1, q_1), \quad r = \psi_2(r_1, p_1, q_1),$$

falls r_1 als neue Veränderliche gilt, p_1, q_1 als neue Parameter auftreten und die Determinante:

$$\frac{\partial p}{\partial p_1}\frac{\partial q}{\partial q_1} - \frac{\partial p}{\partial q_1}\frac{\partial q}{\partial p_1}$$

nicht verschwindet. Die Coordinaten x, y, z der Punkte der Schar werden dadurch Functionen von p_1, q_1, r_1. Berechnet man mit Hülfe dieser Functionen die Ausdrücke für $\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \varkappa_1, \varkappa_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$, so zeigen sie sich gleich den entsprechenden, im System der Variabeln p, q, r gebildeten, Ausdrücken. Dieselbe Eigenschaft hat der Quotient $\frac{f-f'}{\sqrt{EG-F^2}}$. Die Grundlage der zur Erhärtung dieser Behauptungen nöthigen Rechnung, welche ihrer Einfachheit wegen unterbleiben soll, bilden die für eine beliebige Function $\mathfrak{F}$ von p, q und r geltenden Gleichungen:

$$\mathfrak{F}_{p_1} = \mathfrak{F}_p \frac{\partial p}{\partial p_1} + \mathfrak{F}_q \frac{\partial q}{\partial q_1}, \quad \mathfrak{F}_{q_1} = \mathfrak{F}_p \frac{\partial p}{\partial q_1} + \mathfrak{F}_q \frac{\partial q}{\partial q_1}, \quad \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial r_1} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial r_1}.$$

Die gegebene Definition der Krümmungslinien erster Art setzt nur voraus, dass die betrachtete Curvenschar keine isotrope ist. Nimmt man ausserdem an, dass sie keine besondere ist, dass also $H\Psi - \Phi^2 > 0$, — in welchem Fall die Schar eine *allgemeine* genannt wurde —, so kann man für die fraglichen Krümmungslinien noch eine zweite Definition geben, die nun betrachtet werden soll.

Der kürzeste Abstand der benachbarten Tangenten (x, ξ) und $(x + \delta x, \xi + \delta \xi)$ trifft die Tangente (x, ξ) in einem Punkte, dessen Abscisse in Bezug auf den Punkt (x, y, z) $\mathfrak{r}$ sei.

Man hat dann:

$$\mathfrak{r} = -\frac{\Sigma \delta x \delta \xi}{\Sigma \delta \xi^2} = -\frac{e\,dp^2 + (f + f')\,dp\,dq + g\,dq^2}{H\,dp^2 + 2\Phi\,dp\,dq + \Psi\,dq^2}.$$

Da die Determinante $H\Psi - \Phi^2$ von Null verschieden ist, besitzt $\mathfrak{r}$ einen grössten Werth $\mathfrak{r}_1$ und einen kleinsten $\mathfrak{r}_2$. Diese Werthe sind die Wurzeln der Gleichung

$$(10) \quad (H\Psi - \Phi^2)\,\mathfrak{r}^2 + (gH + e\Psi - (f + f')\,\Phi)\,\mathfrak{r} + eg - \left(\frac{f + f'}{4}\right)^2 = 0$$

und sollen die *Abscissen der Grenzpunkte der kürzesten Abstände* genannt werden.

Die Werthe τ_1 und τ_2 des Verhältnisses $\frac{dq}{dp} = t$, welche die das Maximum und Minimum von $\mathfrak{r}$ liefernden Nachbartangenten bestimmen, sind die Wurzeln der Gleichung:

$$(11) \quad \left(g\Phi - \frac{f + f'}{2}\Psi\right) t^2 - (e\Psi - gH)\,t + \frac{f + f'}{2} H - e\Phi = 0.$$

Wir wählen die Bezeichnung der Wurzeln so, dass:

$$\mathfrak{r}_1 = -\frac{e + (f + f')\,\tau_1 + g\tau_1^2}{H + 2\Phi\tau_1 + \Psi\tau_1^2}.$$

Aus der Gleichung:

$$H + \Phi(\tau_1 + \tau_2) + \Psi\tau_1\tau_2 = 0$$

ergiebt sich, dass die Richtungscosinus der zu $\mathfrak{r}_2$ bez. $\mathfrak{r}_1$ gehörenden kürzesten Abstände sind:

$$\varkappa_1' = \frac{\xi_p + \xi_q\tau_1}{W_1}, \quad \lambda_1' = \frac{\eta_p + \eta_q\tau_1}{W_1}, \quad \mu_1' = \frac{\zeta_p + \zeta_q\tau_1}{W_1},$$

bez.

$$\varkappa_2' = \frac{\xi_p + \xi_q\tau_2}{W_2}, \quad \lambda_2' = \frac{\eta_p + \eta_q\tau_2}{W_2}, \quad \mu_2' = \frac{\zeta_p + \zeta_q\tau_2}{W_2},$$

wo:

$$W_1^2 = H + 2\Phi\tau_1 + \Psi\tau_1^2, \quad W_2^2 = H + 2\Phi\tau_2 + \Psi\tau_2^2.$$

Es soll nun gezeigt werden, dass:

$$\varkappa_1' = \varkappa_1, \quad \lambda_1' = \lambda_1, \quad \mu_1' = \mu_1; \quad \varkappa_2' = \varkappa_2, \quad \lambda_2' = \lambda_2, \quad \mu_2' = \mu_2,$$

sodass die Krümmungslinien erster Art den kürzesten Abständen in den Grenzpunkten parallel verlaufen. Wir entwickeln zuvor einige Formeln.

Löst man die Gleichungen:

$$\sum \xi_p x_p = e, \quad \sum \xi_p x_q = f, \quad \sum \xi_p \xi = 0$$

nach ξ_p, η_p, ζ_p auf und ebenso die Gleichungen:

$$\sum \xi_q x_p = f', \quad \sum \xi_q x_q = g, \quad \sum \xi_q \xi = 0$$

nach ξ_q, η_q, ζ_q, so folgt:

$$\xi_p = \frac{x_p(eG - fF) + x_q(fE - eF)}{EG - F^2}, \quad \xi_q = \frac{x_q(f'G - gF) + x_q(gE - f'F)}{EG - F^2}$$

und damit:

$$H = \frac{e^2G - 2efF + f^2E}{EG - F^2}, \qquad \Phi = \frac{ef'G - (eg + ff')F + fgE}{EG - F^2},$$

$$\Psi = \frac{f'^2G - 2f'gF + g^2E}{EG - F^2}, \quad H\Psi - \Phi^2 = \frac{(eg - ff')^2}{EG - F^2}.$$

Die Grösse $eg - ff'$ ist also von Null verschieden. Man führe nun zwei Werthe t' und t'' ein mit Hülfe der Gleichungen:

$$t' = -\frac{e + f'\tau_1}{f + g\tau_1}, \quad t'' = -\frac{e + f'\tau_2}{f + g\tau_2}.$$

Dann ist:

$$e + \frac{f + f'}{2}(t' + t'') + gt't'' = (eg - ff')\frac{e + \frac{f + f'}{2}(\tau_1 + \tau_2) + g\tau_1\tau_2}{f^2 + fg(\tau_1 + \tau_2) + g^2\tau_1\tau_2},$$

$$E + F(t' + t'') + Gt't'' = \frac{(EG - F^2)(H + \Phi(\tau_1 + \tau_2) + \Psi\tau_1\tau_2)}{f^2 + gf(\tau_1 + \tau_2) + g^2\tau_1\tau_2}.$$

Die rechten Seiten dieser Beziehungen verschwinden vermöge (11). Dadurch erweisen sich aber t' und t'' als die Wurzeln der Gleichung (7). Ferner wird:

$$\xi_p + \xi_q\tau_1 = \frac{(eg - ff')\{x_p(F + Gt') - x_q(E + Ft')\}}{(EG - F^2)(f' + gt')} = \frac{(eg - ff')(F + Gt')(x_p + x_q t'')}{(EG - F^2)(f' + gt')}.$$

Setzt man also $t'' = t_1$, $t' = t_2$, so folgt:

$$\varkappa_1' = \varkappa_1, \quad \varkappa_2' = \varkappa_2, \text{ u. s. f.}$$

Ausserdem hat man:

$$e + (f + f')\tau_1 + g\tau_1^2 = \frac{eg - ff'}{(f' + gt_2)^2}(e + (f + f')t_2 + gt_2^2),$$

$$H + 2\Phi\tau_1 + \Psi\tau_1^2 = \frac{(eg - ff')^2(E + 2Ft_2 + Gt_2^2)}{(EG - F^2)(f' + gt_2)^2}.$$

Es bestehen also zwischen den Grössen $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$ einerseits und h_1, h_2 andererseits die Beziehungen:

$$\text{(12)} \qquad \mathfrak{r}_1 = \frac{EG - F^2}{eg - ff'} \cdot \frac{1}{h_2}, \quad \mathfrak{r}_2 = \frac{EG - F^2}{eg - ff'} \cdot \frac{1}{h_1}.$$

Mit dem Namen *Krümmungslinien zweiter Art* sollen diejenigen orthogonalen Trajectorien der Curvenschar belegt werden, längs derer

die Tangenten (ξ, η, ζ) abwickelbare Flächen bilden. Die Tangente (x, ξ) wird von der Nachbartangente $(x + \delta x, \xi + \delta \xi)$ geschnitten, falls:

$$(13) \qquad \delta x (\eta \delta \zeta - \zeta \delta \eta) + \delta y (\zeta \delta \xi - \xi \delta \zeta) + \delta z (\xi \delta \eta - \eta \delta \xi) = 0.$$

Es sei erstens die Curvenschar eine besondere. Wir nehmen hier

$$\xi_q = n \xi_p, \quad \eta_q = n \eta_p, \quad \zeta_q = n \zeta_p,$$

wo n eine endliche Function von p, q, r bedeutet, die auch verschwinden kann. Der hierdurch ausgeschlossene Fall $\xi_p = \eta_p = \zeta_p = 0$ ist entsprechend zu behandeln.

Setzt man:

$$k = \sum x_p (\eta \zeta_p - \zeta \eta_p), \qquad k' = \sum x_q (\eta \zeta_p - \zeta \eta_p),$$

so nimmt die Bedingung (13) die Form an:

$$(k + k't)(1 + nt) = 0.$$

Ist zweitens die Curvenschar eine allgemeine, so hat man:

$$\xi = \frac{\eta_p \zeta_q - \zeta_p \eta_q}{\sqrt{H \Psi - \Phi^2}}, \quad \eta = \frac{\zeta_p \xi_q - \xi_p \zeta_q}{\sqrt{H \Psi - \Phi^2}}, \quad \zeta = \frac{\xi_p \eta_q - \xi_q \eta_p}{\sqrt{H \Psi - \Phi^2}}$$

und die Bedingung (13) wird zu:

$$(g \Phi - f \Psi) dq^2 + (gH - (f - f') \Phi - e \Psi) dp dq + (f' H - e \Phi) dp^2 = 0.$$

Die Abscisse des Schnittpunktes der beiden Nachbartangenten in Bezug auf den Punkt (x, y, z) besitzt den Ausdruck:

$$- \frac{\delta x \delta \xi + \delta y \delta \eta + \delta z \delta \zeta}{\delta \xi^2 + \delta \eta^2 + \delta \zeta^2}.$$

Er wird für eine besondere Curvenschar bei $1 + nt = 0$ stets unendlich. Der andere, für $k + k't = 0$ sich ergebende Werth möge mit ϱ_1 bezeichnet werden, sodass:

$$\varrho_1 = - \frac{ek' - fk}{H(k' - nk)}.$$

Im betrachteten Fall hat man:

$$x_p = \frac{e \xi_p + k (\eta \zeta_p - \zeta \eta_p)}{H}, \quad x_q = \frac{f \xi_p + k' (\eta \zeta_p - \zeta \eta_p)}{H},$$

folglich:

$$E = \frac{e^2 + k^2}{H}, \quad F = \frac{ef + kk'}{H}, \quad G = \frac{f^2 + k'^2}{H}.$$

Da hier ausserdem:

$$g = nf, \quad f' = ne,$$

so findet sich:

$$\frac{eG + Eg - (f + f') F}{EG - F^2} = \frac{H(k' - nk)}{ek' - fk}, \quad \frac{eg - \frac{1}{4}(f + f')^2}{EG - F^2} = - \frac{(f - f')^2}{4(EG - F^2)}.$$

Wir setzen allgemein: $\frac{(f-f')^2}{4(EG-F^2)} = \varepsilon^2$ und erhalten aus (6):

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} = \frac{1}{\varrho_1}, \quad \frac{1}{h_1 h_2} = \varepsilon^2.$$

Bei einer allgemeinen Curvenschar werden die Abscissen ϱ_1 und ϱ_2 der fraglichen Schnittpunkte die Wurzeln der Gleichung:

$$(14) \quad (H\Psi - \Phi^2)\varrho^2 + (e\Psi - (f+f')\Phi + gH)\varrho + eg - ff' = 0,$$

sodass:

$$\frac{eg-ff'}{H\Psi - \Phi^2} = \frac{EG-F^2}{eg-ff'} = \varrho_1\varrho_2.$$

Die Vergleichung von (10) und (14) liefert die Beziehungen zwischen ϱ_1, ϱ_2 und $\mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$ in der Form:

$$(15) \qquad \mathfrak{r}_1 + \mathfrak{r}_2 = \varrho_1 + \varrho_2, \quad \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 = \varrho_1\varrho_2(1 - \varepsilon^2\varrho_1\varrho_2),$$

und die Vergleichung von (12) und (14) ergiebt die Beziehungen zwischen ϱ_1, ϱ_2 und h_1, h_2 in der Gestalt:

$$(16) \qquad \begin{cases} \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}, \\ \frac{1}{h_1 h_2} = \frac{1}{\varrho_1\varrho_2} - \varepsilon^2. \end{cases}$$

Die Krümmungslinien zweiter Art bilden eine einzige Schar, oder zwei getrennte Scharen, oder sie sind imaginär, je nachdem die Gleichung (14) gleiche, reell verschiedene oder imaginäre Wurzeln besitzt. In jeder Normalschar ($\varepsilon = 0$) fallen die Krümmungslinien zweiter Art mit den Krümmungslinien erster Art zusammen.

§ 5. Zur Theorie der geradlinigen Strahlensysteme.

Eine doppelt unendliche Curvenschar, welche aus lauter geraden Linien besteht, nennt man ein *Strahlensystem*. Die Krümmungslehre dieser Systeme ist zuerst von Kummer (Journal für die r. u. a. Math. Bd. 57. S. 189) bearbeitet, dem man in der Begründungsweise bis jetzt im Wesentlichen gefolgt ist. (Vgl. Bianchi, Lezioni di Geometria differenziale S. 244 u. f.). Nur die Lehre von den Brennpunkten und Brennebenen ist von Herrn Königs (Annales scientifiques de l'École Normale 1882. S. 219) dadurch bereichert worden, dass er sie vom Standpunkt der projectiven Geometrie aus begründete. Von Kummer sind nur allgemeine Strahlensysteme in Betracht gezogen. Hierdurch wird zwar die Einführung der zusammengesetzten Differentiationen x_p, x_q u. s. f. überflüssig, aber die Definition der Hauptebenen versagt bei einem besonderen Strahlensystem. Aus diesem Grunde soll hier eine Einführung in die Lehre von den Strahlensystemen folgen, welche

von dem Königs'schen Standpunkte ausgehend eine Anwendung der im vorigen Paragraphen gegebenen Entwickelungen darstellt.

Durch einen Punkt P_0 mit den Coordinaten x_0, y_0, z_0 sei eine Gerade mit den Richtungscosinus ξ, η, ζ gelegt. Dann hat ein beliebiger Punkt P der Geraden die Coordinaten:

$$x = x_0 + l\xi, \quad y = y_0 + l\eta, \quad z = z_0 + l\zeta. \tag{1}$$

Eine zweite Gerade, die aber nicht zur ersten senkrecht sein soll, besitze die Richtungscosinus ξ', η', ζ'. Die durch P_0 gelegte Normalebene der ersten Geraden schneide die zweite im Punkte P_0' mit den Coordinaten x_0', y_0', z_0'. Legt man durch P eine Normalebene der ersten Geraden, so wird die zweite Gerade von ihr in einem Punkte P' geschnitten, dessen Coordinaten sind:

$$x' = x_0' + \frac{l\xi'}{\cos\varphi}, \quad y' = y_0' + \frac{l\eta'}{\cos\varphi}, \quad z' = z_0' + \frac{l\zeta'}{\cos\varphi}. \tag{2}$$

Wir denken uns nun zwei zu einander senkrechte Ebenen gewählt, die sich in der ersten Geraden schneiden. Die Richtungscosinus der Normalen der ersten dieser Ebenen (E_1) seien $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$; die der Normalen der zweiten (E_2) seien $\beta_x, \beta_y, \beta_z$. Bildet die durch die erste Gerade und den Punkt P' gelegte Ebene mit der Ebene (E_1) den Winkel λ, so ergiebt sich.

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\cos\varphi\, \Sigma(x_0' - x_0)\,\alpha_x + l\,\Sigma\,\xi'\alpha_x}{\cos\varphi\, \Sigma(x_0' - x_0)\,\beta_x + l\,\Sigma\,\xi'\beta_x}. \tag{3}$$

Die fragliche Ebene wollen wir als dem Punkt P zugeordnet betrachten. Sieht man in (3) die Abscisse l als veränderlich an, so stellt diese Gleichung ein Ebenenbüschel dar, dessen Axe die erste Gerade ist, und dessen Ebenen dieser Geraden projectiv zugeordnet sind. Diese Zuordnung ist eine specielle, falls:

$$\sum (x_0' - x_0)(\eta\zeta' - \zeta\eta') = 0.$$

Hier sind die Geraden entweder parallel oder sie schneiden sich in einem Punkt, dessen Abscisse in Bezug auf P_0 durch:

$$\varrho = -\cos\varphi\,\frac{\Sigma(x_0' - x_0)\,\xi'}{\sin^2\varphi}$$

dargestellt wird.

Schliessen wir diesen Fall aus, so entspricht dem unendlich fernen Punkt der ersten Geraden die zur zweiten parallele Ebene (E_3). Dem in der ersten Geraden liegenden Endpunkt des kürzesten Abstands der beiden Geraden entspricht die zu E_3 senkrechte Ebene.

Wir betrachten ausser dem Punkt P einen zweiten Punkt Q der

ersten Geraden, für den die Grössen l und λ mit l' und λ' bezeichnet seien. Giebt man zur Abkürzung der Gleichung (3) die Gestalt

$$a_1 l \operatorname{tg} \lambda + a_2 l + a_3 \operatorname{tg} \lambda + a_4 = 0,$$

so ist:

$$\frac{1}{l'-l} = -\frac{(a_1 a_4 - a_2 a_3) \operatorname{cotg}(\lambda - \lambda') + (a_1^2 + a_2^2) l + a_1 a_3 + a_2 a_4}{(a_1 l + a_3)^2 + (a_2 l + a_4)^2};$$

hier bedeutet $l' - l$ die Abscisse des Punktes Q in Bezug auf P.

Die Grösse $\lambda - \lambda'$ ist von Kummer mit dem Namen „*Drehungswinkel der zweiten Geraden um die erste für die Strecke PQ*“ belegt worden.

Ist der Drehungswinkel ein Rechter, so folgt:

$$\frac{1}{l'-l} = -\frac{(a_1^2 + a_2^2) + a_1 a_3 + a_2 a_4}{(a_1 l + a_3)^2 + (a_2 l + a_4)^2}. \tag{4}$$

Man betrachte nun $x_0, y_0, z_0, \xi, \eta, \zeta$ als Functionen von p und q und gebe diesen Veränderlichen die Zuwächse $\Delta p, \Delta q$, wodurch x_0, ξ u. s. f. in $x_0 + \Delta x_0, \xi + \Delta \xi$ u. s. f. übergehen mögen. Dann wird:

$$x_0' = x_0 + \Delta x_0 - \frac{(\xi + \Delta\xi)\Sigma\xi\Delta x_0}{\cos\varphi},$$

und da:

$$\Delta x = \Delta x_0 + l\Delta\xi,$$

folgt weiter:

$$x' - x = \Delta' x = \frac{\cos\varphi\,\Delta x_0 + l\Delta\xi - \Delta\xi\,\Sigma\xi\Delta x_0 - \xi\Sigma\xi\Delta x}{\cos\varphi},$$

sowie:

$$a_1 = \sum \Delta\xi \cdot \beta_x, \qquad a_2 = -\sum \Delta\xi \cdot \alpha_x,$$

$$a_1 l + a_3 = \cos\varphi \sum \beta_x \Delta_x', \qquad a_2 l + a_4 = -\cos\varphi \sum \alpha_x \Delta_x'.$$

Die Gleichung (3) geht über in:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\cos\varphi\,\Sigma\alpha_x\Delta x_0 + l\Sigma\alpha_x\Delta\xi - \Sigma\alpha_x\Delta\xi \cdot \Sigma\xi\Delta x_0}{\cos\varphi\,\Sigma\beta_x\Delta x_0 + l\Sigma\beta_x\Delta\xi - \Sigma\beta_x\Delta\xi \cdot \Sigma\xi\Delta x_0}$$

und an Stelle von (4) entsteht, falls $l' - l = h$ genommen wird:

$$\frac{1}{h} = -\frac{\Sigma\Delta\xi\Delta' x}{\cos\varphi\,\Sigma\Delta' x^2}.$$

Beim Uebergang zur Grenze werde $\Delta' x, \Delta' y, \Delta' z$ durch $\delta x, \delta y, \delta z$ ersetzt. Man hat dann im Grenzfall:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\Sigma\alpha_x dx_0 + l\Sigma\alpha_x d\xi}{\Sigma\beta_x dx_0 + l\Sigma\beta_x d\xi}, \tag{5}$$

$$\frac{1}{h} = -\frac{\Sigma d\xi\delta x}{\Sigma\delta x^2}. \tag{6}$$

Dabei ist:

$$\delta x = x_p dp + x_q dq = \left(\frac{\partial x_0}{\partial p} + l\frac{\partial \xi}{\partial p} - \xi \sum \xi \frac{\partial x_0}{\partial p}\right) dp + \left(\frac{\partial x_0}{\partial q} + l\frac{\partial \xi}{\partial q} - \xi \sum \xi \frac{\partial x_0}{\partial q}\right) dq.$$

Die Gleichung (5) stellt *eine lineare Reihe von Ebenenbüscheln* dar, in welcher jeder Einzelbüschel durch Bestimmung des Verhältnisses $\frac{dq}{dp}$ festgelegt wird.

Die *singulären* Einzelbüschel der Reihe, in denen allen Punkten der Geraden (x_0, ξ) ein und dieselbe Ebene zugeordnet ist (specielle Projectivität), sind die *Brennebenen* des Strahls (x_0, ξ).

Man setze zur Abkürzung:

$$e_0 = \sum \frac{\partial x_0}{\partial p} \frac{\partial \xi}{\partial p}, \quad f_0 = \sum \frac{\partial x_0}{\partial q} \frac{\partial \xi}{\partial p}, \quad f_0' = \sum \frac{\partial x_0}{\partial p} \frac{\partial \xi}{\partial q}, \quad g_0 = \sum \frac{\partial x_0}{\partial q} \frac{\partial \xi}{\partial q},$$

$$k_0 = \sum \frac{\partial x_0}{\partial p}\left(\eta \frac{\partial \zeta}{\partial p} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial p}\right), \qquad k_0' = \sum \frac{\partial x_0}{\partial q}\left(\eta \frac{\partial \zeta}{\partial p} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial p}\right).$$

Hat man es mit einem besonderen Strahlensystem zu thun, wo:

$$\frac{\partial \xi}{\partial q} = n \frac{\partial \xi}{\partial p}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial q} = n \frac{\partial \eta}{\partial p}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial q} = n \frac{\partial \zeta}{\partial p},$$

so werden die Brennebenen durch die Gleichungen:

$$k_0 dp + k_0' dq = 0 \quad \text{und} \quad dp + n\, dq = 0$$

festgelegt. Der eine Brennpunkt liegt unendlich fern, die Abscisse ϱ des anderen genügt der Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho} = -\frac{H(k_0' - n k_0)}{e_0 k_0' - k_0 f_0}. \tag{7}$$

Bei einem allgemeinen Strahlensystem werden die Brennebenen mit Hülfe der Gleichung:

$$(Hf_0' - \Phi e_0) dq^2 + (Hg_0 - \Phi(f_0 - f_0') - \Psi e_0) dp\, dq + (\Phi g_0 - \Psi f_0) dq^2 = 0$$

bestimmt, während die Abscissen der Brennpunkte der Beziehung genügen:

$$(H\Psi - \Phi^2)\varrho^2 + (e_0 \Psi - (f_0 + f_0')\Phi + g_0 H)\varrho + e_0 g_0 - f_0 f_0' = 0. \tag{8}$$

Eine Erzeugungsweise von Strahlensystemen mit imaginären Brennpunkten ergiebt sich auf folgendem Wege.

Man nehme drei Functionen U, V, W der complexen Veränderlichen $p + iq$ und setze, die reellen und imaginären Theile dieser Functionen sondernd:

$$U = x_0 + i x_1, \quad V = y_0 + i y_1, \quad W = z_0 + i z_1.$$

Dann sind x_0, y_0, z_0 einerseits, x_1, y_1, z_1 andererseits die Coordinaten je einer Fläche. Ein Werthepaar (p, q) ordnet einem Punkte der einen

Fläche einen Punkt der anderen zu, und die Verbindungslinien derartig einander zugeordneter Punkte bilden ein Strahlensystem.

Die Richtungscosinus der Strahlen sind bestimmt durch die Gleichungen:

$$\xi = \frac{x_1 - x_0}{R}, \quad \eta = \frac{y_1 - y_0}{R}, \quad \zeta = \frac{z_1 - z_0}{R},$$

wo:

$$R = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2}.$$

Hierdurch erhält man:

$$H = \frac{1}{R} \sum \frac{\partial (x_1 - x_0)}{\partial p} \frac{\partial \xi}{\partial p} = - \frac{e_0 + f_0}{R},$$

$$\Phi = \frac{1}{R} \sum \frac{\partial (x_1 - x_0)}{\partial p} \frac{\partial \xi}{d q} = - \frac{g_0 + f_0'}{R},$$

$$\Phi = \frac{1}{R} \sum \frac{\partial (x_1 - x_0)}{\partial q} \frac{\partial \xi}{\partial p} = \frac{e_0 - f_0}{R},$$

$$\Psi = \frac{1}{R} \sum \frac{\partial (x_1 - x_0)}{\partial q} \frac{\partial \xi}{\partial q} = \frac{f_0' - g_0}{R},$$

$$H\Psi - \Phi^2 = 2 \frac{e_0 g_0 - f_0 f_0'}{R^2}.$$

Die Gleichung (8) gewinnt die Gestalt:

$$2\varrho^2 - 2\varrho R + R^2 = 0$$

und besitzt imaginäre Wurzeln.

Betrachten wir nun die Gleichung (6). Sie nimmt bei Anwendung der Bezeichnungen des vorigen Paragraphen die Form an:

$$\frac{1}{h} = - \frac{e dp^2 + (f + f') dp dq + g dq^2}{E dp^2 + 2 F dp dq + G dq^2}. \tag{9}$$

Hier ist:

$$e = e_0 + l H, \quad f = f_0 + l \Phi, \quad f' = f_0' + l \Phi, \quad g = g_0 + l \Psi,$$

und wenn:

$$k = \sum x_p \left(\eta \frac{\partial \zeta}{\partial p} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial p}\right), \quad k' = \sum x_q \left(\eta \frac{\partial \zeta}{\partial p} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial p}\right),$$

hat man weiter:

$$x_p = \frac{1}{H}\left(e \frac{\partial \xi}{\partial p} + k \left(\eta \frac{\partial \zeta}{\partial p} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial p}\right)\right), \quad x_q = \frac{1}{H}\left(f \frac{\partial \xi}{\partial p} + k' \left(\eta \frac{\partial \zeta}{\partial p} - \zeta \frac{\partial \eta}{\partial p}\right)\right),$$

also auch:

$$E = \frac{e^2 + k^2}{H}, \quad F = \frac{ef + kk'}{H}, \quad G = \frac{f^2 + k'^2}{H},$$

$$EG - F^2 = \left(\frac{ek' - fk}{H}\right)^2.$$

Die Differenz $EG - F^2$ verschwindet nur, wenn der Punkt mit der Abscisse l ein Brennpunkt ist. Bei einem besonderen Strahlensystem

wird nämlich:

$$ek' - fk = e_0 k_0' - f_0 k_0 + Hl(k_0' - n k_0),$$

bei einem allgemeinen hat man aber:

$$\xi = \frac{\frac{\partial \eta}{\partial p}\frac{\partial \zeta}{\partial q} - \frac{\partial \eta}{\partial q}\frac{\partial \zeta}{\partial p}}{\sqrt{H\Psi - \Phi^2}} \text{ u. s. f.,}$$

folglich:

$$(10) \qquad k = \frac{Hf' - \Phi e}{\sqrt{H\Psi - \Phi^2}}, \qquad k' = \frac{Hg - \Phi f}{\sqrt{H\Psi - \Phi^2}},$$

$$ek' - fk = \frac{H(eg - ff')}{\sqrt{H\Psi - \Phi^2}},$$

$$eg - ff' = l^2(H\Psi - \Phi^2) + l(e_0\Psi - (f_0 + f_0')\Phi + g_0 H) + e_0 g_0 - f_0 f_0'.$$

Fällt der Punkt (x, y, z) nicht in einen Brennpunkt, so ergeben sich wie im vorigen Paragraphen die beiden Hauptnormalkrümmungen und die Krümmungslinien erster Art. Um zu den Kummer'schen Hauptebenen zu gelangen, ist zu zeigen, dass die Tangenten ein und derselben Schar von Krümmungslinien erster Art längs eines Strahls parallel sind, oder, was dasselbe ist, dass die Richtungscosinus $\varkappa_1, \varkappa_2$ u. s. f. nicht von l abhängen.

Bei Anwendung obiger Ausdrücke für x_p, x_q hat man:

$$\varkappa_\nu = \frac{(e + ft_\nu)\frac{\partial \xi}{\partial p} + (k + k't_\nu)\left(\eta\frac{\partial \zeta}{\partial p} - \zeta\frac{\partial \eta}{\partial p}\right)}{\sqrt{H}\sqrt{(e + ft_\nu)^2 + (k + k't_\nu)^2}} \quad (\nu = 1, 2).$$

Die beiden Quotienten:

$$u_\nu = \frac{k + k't_\nu}{e + ft_\nu}$$

müssen daher von l unabhängig sein.

Um dies nachzuweisen, nehme man

$$u = \frac{k + k't}{e + ft}$$

und ersetze in dem Ausdruck für $\frac{1}{h}$ die Grösse $t = \frac{dq}{dp}$ durch

$$\frac{eu - k}{k' - fu}.$$

Bezeichnet J die Determinante

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta & \zeta \\ \frac{\partial \xi}{\partial p} & \frac{\partial \eta}{\partial p} & \frac{\partial \zeta}{\partial p} \\ \frac{\partial \xi}{\partial q} & \frac{\partial \eta}{\partial q} & \frac{\partial \zeta}{\partial q} \end{vmatrix},$$

so wird:

$$f' = \frac{e\Phi + kJ}{H}, \quad g = \frac{f\Phi + k'J}{H}$$

und:

$$e + (f + f')t + gt^2 = \frac{ek' - fk}{H(k' - fu)^2}(k'H - k\Phi + (e\Phi - fH - kJ)u + eJu^2),$$

$$E + 2Ft + Gt^2 = \frac{(ek' - fk)^2}{H(k' - fu)^2}(1 + u^2),$$

also:

$$\frac{1}{h} = \frac{k'H - k\Phi + (e\Phi - fH - kJ)u + eJu^2}{(fk - ek')(1 + u^2)}.$$

Die Grössen u_1 und u_2 sind diejenigen Werthe von u, welche das Maximum und Minimum von $\frac{1}{h}$ liefern, folglich die Wurzeln der Gleichung:

$$u^2 + 2\frac{k'H - k\Phi - eJ}{e\Phi - fH - kJ}u - 1 = 0.$$

Da nun:

$$k = k_0, \quad k' = k_0' + lJ,$$

so ist:

$$u_1 + u_2 = -2\frac{k_0'H - k_0\Phi - e_0 J}{e_0\Phi - f_0 H - k_0 J},$$

d. h. die Grössen u_1 und u_2 sind in der That von l unabhängig.

Bei einem allgemeinen Strahlensystem spielt die *sphärische Abbildung* eine Hauptrolle. Man ziehe zu den positiven Theilen der Strahlen des Systems parallele Radien der Einheitskugel und betrachte den in der Kugeloberfläche liegenden Endpunkt eines Halbmessers als das sphärische Bild des dem Halbmesser parallelen Strahls. Auf diese Weise wird jede von Strahlen des Systems erzeugte Fläche durch eine Curve auf der Einheitskugel abgebildet.

Die Krümmungslinien zweiter Art verlaufen in abwickelbaren Flächen. Eine solche wird durch eine sphärische Curve abgebildet, deren Tangenten den Tangenten der in der betreffenden abwickelbaren Fläche verlaufenden Krümmungslinien zweiter Art parallel sind. Wir nennen die Richtungscosinus dieser Tangenten $\varkappa_3, \lambda_3, \mu_3; \varkappa_4, \lambda_4, \mu_4$. Ferner sei:

$$(10) \quad d\xi = \varkappa_3 S_1 + \varkappa_4 S_2, \quad d\eta = \lambda_3 S_1 + \lambda_4 S_2, \quad d\zeta = \mu_3 S_1 + \mu_4 S_2.$$

Die Zeichen S_1 und S_2 bedeuten lineare Differentialformen, welche gleich Null gesetzt die Differentialgleichungen der sphärischen Bilder der Krümmungslinien zweiter Art liefern.

Für die Differentialformen $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$ muss es eine Darstellung geben von der Form:

$$\delta x_0 = \varkappa_3(aS_1 + bS_2) + \varkappa_4(cS_1 + dS_2), \text{ u. s. f.}$$

Nun ist für jede abwickelbare Fläche des Strahlensystems:

$$\sum \delta x_0 (\eta\, d\xi - \xi\, d\eta) = 0$$

oder:

$$c S_1^2 - (a - d)\, S_1 S_2 - b S_2^2 = 0.$$

Damit dieser Beziehung durch $S_1 = 0$ und $S_2 = 0$ genügt werde, müssen c und b verschwinden. Jetzt hat man für $l = 0$:

$$\frac{1}{h} = -\frac{a S_1^2 + (a + d)\, \Sigma \varkappa_3 \varkappa_4\, S_1 S_2 + d S_2^2}{a^2 S_1^2 + 2ad\, \Sigma \varkappa_3 \varkappa_4\, S_1 S_2 + d^2 S_2^2}.$$

Da die Grösse h für $S_2 = 0$ den Werth ϱ_1, für $S_1 = 0$ den Werth ϱ_2 besitzt, folgt:

$$a = -\varrho_1, \quad d = -\varrho_2$$

und:

$$\delta x_0 = -\varrho_1 \varkappa_3 S_1 - \varrho_2 \varkappa_4 S_2. \tag{11}$$

Wir benutzen die Darstellungen (10) und (11) zur Umformung der Gleichung (5).

Man hat:

$$\sum \alpha_x\, dx_0 = \sum \alpha_x\, \delta x_0, \quad \sum \beta_x\, dx_0 = \sum \beta_x\, \delta x_0,$$

daher ergiebt sich:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{(l - \varrho_1)\, S_1\, \Sigma \alpha_x \varkappa_3 + (l - \varrho_2)\, S_2\, \Sigma \alpha_x \varkappa_4}{(l - \varrho_1)\, S_1\, \Sigma \beta_x \varkappa_3 + (l - \varrho_2)\, S_2\, \Sigma \beta_x \varkappa_4}.$$

Die Werthe von λ, welche zu $S_2 = 0$ und $S_1 = 0$ gehören, bestimmen die beiden Brennebenen. Bezeichnen wir diese Werthe mit λ_1 und λ_2, so wird:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\operatorname{tg}\lambda_1\, (l - \varrho_1)\, \Sigma \beta_x \varkappa_3 + \operatorname{tg}\lambda_2\, (l - \varrho_2)\, \Sigma \beta_x \varkappa_4 \cdot \tau}{(l - \varrho_1)\, \Sigma \beta_x \varkappa_3 + (l - \varrho_2)\, \Sigma \beta_x \varkappa_4 \cdot \tau}, \tag{12}$$

wo:

$$\frac{S_2}{S_1} = \tau$$

genommen ist.

Man fasse nun zwei nicht singuläre Einzelbüschel aus der durch (12) festgelegten linearen Reihe von solchen ins Auge. Sie mögen zu den Werthen τ und τ' gehören. Betrachtet man jede durch den Strahl (x_0, ξ) gelegte Ebene einmal als dem Einzelbüschel (τ), dann als dem Einzelbüschel (τ') angehörig, so erhält man im Büschel (τ) einen ihr entsprechenden Punkt mit der Abscisse l, im Büschel (τ') einen ihr entsprechenden Punkt, dessen Abscisse l' sei. Da jetzt neben (12) auch die Beziehung:

$$\operatorname{tg}\lambda = \frac{\operatorname{tg}\lambda_1\, (l' - \varrho_1)\, \Sigma \beta_x \varkappa_3 + \operatorname{tg}\lambda_2\, (l' - \varrho_2)\, \Sigma \beta_x \varkappa_4 \cdot \tau'}{(l' - \varrho_1)\, \Sigma \beta_x \varkappa_3 + (l' - \varrho_2)\, \Sigma \beta_x \varkappa_4 \cdot \tau}$$

besteht, so bestimmen die beiden Einzelbüschel (τ) und (τ') auf dem Strahl (x_0, ξ) eine projective Punktzuordnung mit der Gleichung:

$$(13) \qquad \frac{(l-\varrho_1)(l'-\varrho_2)}{(l-\varrho_2)(l'-\varrho_1)} = \frac{\tau}{\tau'}.$$

Dies zeigt zunächst, dass die Brennpunkte des Strahls (x_0, ξ) die Doppelelemente jeder auf die betrachtete Art erhaltenen Punktzuordnung sind.

Die beiden Brennebenen bestimmen zwei durch das sphärische Bild des Strahls (x_0, ξ) hindurchgehende Kugeltangenten, welche die *Brenntangenten* heissen mögen. Ebenso bestimmen τ und τ' zwei durch denselben Kugelpunkt hindurchgehende Kugeltangenten, und $\frac{\tau}{\tau'}$ ist ihr Doppelverhältniss zum Paar der Brenntangenten. Dasselbe ist nach (13) gleich dem Doppelverhältniss jedes Paares entsprechender Punkte (l, l') zum Paar der Brennpunkte.

Die Punktordnung (13) ist eine Involution, wenn das Doppelverhältniss $\frac{\tau}{\tau'}$ ein harmonisches ist.

In ähnlicher Weise ergeben sich die Brennebenen als Doppelelemente projectiver Zuordnungen. Jedem Punkt der Geraden (x_0, ξ) entspricht sowohl im Büschel (τ), wie im Büschel (τ') eine Ebene. Die erste ist durch den Winkel λ bestimmt, die zweite werde durch den Winkel λ' festgelegt.

Da jetzt sowohl:

$$l = \frac{\varrho_1 (\operatorname{tg}\lambda - \operatorname{tg}\lambda_1) \Sigma \beta_x \varkappa_3 + \varrho_2 (\operatorname{tg}\lambda - \operatorname{tg}\lambda_2) \Sigma \beta_x \varkappa_4 \cdot \tau}{(\operatorname{tg}\lambda - \operatorname{tg}\lambda_1) \Sigma \beta_x \varkappa_3 + (\operatorname{tg}\lambda - \operatorname{tg}\lambda_2) \Sigma \beta_x \varkappa_4 \cdot \tau}$$

als auch:

$$l = \frac{\varrho_1 (\operatorname{tg}\lambda' - \operatorname{tg}\lambda_1) \Sigma \beta_x \varkappa_3 + \varrho_2 (\operatorname{tg}\lambda' - \operatorname{tg}\lambda_2) \Sigma \beta_x \varkappa_4 \cdot \tau'}{(\operatorname{tg}\lambda' - \operatorname{tg}\lambda_1) \Sigma \beta_x \varkappa_3 + (\operatorname{tg}\lambda' - \operatorname{tg}\lambda_2) \Sigma \beta_x \varkappa_4 \cdot \tau'},$$

so wird:

$$(14) \qquad \frac{(\operatorname{tg}\lambda - \operatorname{tg}\lambda_1)(\operatorname{tg}\lambda' - \operatorname{tg}\lambda_2)}{(\operatorname{tg}\lambda - \operatorname{tg}\lambda_2)(\operatorname{tg}\lambda' - \operatorname{tg}\lambda_1)} = \frac{\tau}{\tau'}.$$

Diese Gleichung ordnet nach Wahl von τ und τ' jeder durch den Strahl (x_0, ξ) gehenden Ebene eine zweite projectiv zu. Die Doppelelemente jeder derartigen Zuordnung sind die beiden Brennebenen.

Im Anschluss an diese Bemerkungen über Strahlensysteme sollen die Guichard'schen Sätze (Annales de l'École Normale, 1889. S. 333, vergl. Bianchi, Lezioni S. 261) von dem hier eingenommenen Standpunkte aus begründet werden, einmal, um zu zeigen, dass die Einführung der Ableitungen nach Bogenlängen eine Vereinfachung der Rechnungen zur Folge hat, und dann, um durch Mittheilung eines, wie es scheint, noch nicht bemerkten flächentheoretischen Satzes die

Guichard'schen Ergebnisse zu vervollständigen. Zur Darlegung des fraglichen Satzes ist es nöthig, einige Bemerkungen vorauszuschicken, die als Erweiterung der Entwickelungen im § 2 anzusehen sind.

Wir wählen zwei lineare Differentialformen:

$$T_1 = \alpha_{11}\,dp + \alpha_{12}\,dq, \quad T_2 = \alpha_{21}\,dp + \alpha_{22}\,dq$$

und betrachten $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ als die Differentialgleichungen zweier Curvenscharen auf einer Fläche (x, y, z). Dabei soll vorausgesetzt werden, dass:

$$\sum (dx)^2_{T_1} = \sum (dx)^2_{T_2} = 1, \quad \sum (dx)_{T_1}(dx)_{T_2} = \cos\varphi \gtrless 0,$$
$$\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} = \varDelta \gtrless 0.$$

Bedeutet ν_1 einen integrirenden Factor von T_1, ν_2 einen solchen von T_2, so hat man:

$$(d\log\nu_1)_{T_2} = \frac{1}{\varDelta}\left(\frac{\partial\alpha_{12}}{\partial p} - \frac{\partial\alpha_{11}}{\partial q}\right), \quad (d\log\nu_2)_{T_1} = \frac{1}{\varDelta}\left(\frac{\partial\alpha_{21}}{\partial q} - \frac{\partial\alpha_{22}}{\partial p}\right).$$

Folglich sind T_1 und T_2 vollständige Differentiale, wenn:

$$(d\log\nu_1)_{T_2} = (d\log\nu_2)_{T_1} = 0.$$

Für eine beliebige Function $\mathfrak{F}$ von p und q erhält man wie im § 2:

$$(15) \quad (d\mathfrak{F})_{T_1T_2} - (d\mathfrak{F})_{T_2T_1} = (d\mathfrak{F})_{T_1}(d\log\nu_1)_{T_2} - (d\mathfrak{F})_{T_2}(d\log\nu_2)_{T_1}.$$

Es handelt sich jetzt darum, die geometrische Bedeutung der Grössen $(d\log\nu_1)_{T_2}$ und $(d\log\nu_2)_{T_1}$ kennen zu lernen. Wir führen zu diesem Zwecke zwei weitere Differentialformen durch die Gleichungen ein:

$$T_1' = \frac{T_2 + T_1\cos\varphi}{\sin\varphi}, \quad T_2' = \frac{T_1 + T_2\cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Dann sind $T_1' = 0$, $T_2' = 0$ die Differentialgleichungen der orthogonalen Trajectorien der Curven $T_1 = 0$, $T_2 = 0$. Durch einen Flächenpunkt gehen vier Einzelcurven der betrachteten vier Scharen. Für ihre geodätischen Krümmungen erhält man die Ausdrücke:

$$\frac{1}{R_{T_1}} = \sum (dx)_{T_1'}(dx)_{T_1^2}, \qquad \frac{1}{R_{T_2}} = \sum (dx)_{T_2'}(dx)_{T_2^2},$$
$$\frac{1}{R_{T_1'}} = -\sum (dx)_{T_1'}(dx)_{T_1T_1'}, \quad \frac{1}{R_{T_2'}} = -\sum (dx)_{T_2'}(dx)_{T_2T_2'}.$$

Da:

$$(d\mathfrak{F})_{T_1'} = \frac{-\cos\varphi\,(d\mathfrak{F})_{T_1} + (d\mathfrak{F})_{T_2}}{\sin\varphi}, \quad (d\mathfrak{F})_{T_2'} = \frac{(d\mathfrak{F})_{T_1} - \cos\varphi\,(d\mathfrak{F})_{T_2}}{\sin\varphi},$$

so wird:

$$(dx)_{T_1T_1'} = \frac{-\cos\varphi\,(dx)_{T_1^2} + (dx)_{T_1T_2}}{\sin\varphi}, \quad (dx)_{T_2T_2'} = \frac{(dx)_{T_2T_1} - \cos\varphi\,(dx)_{T_2^2}}{\sin\varphi}$$

und:

$$\frac{1}{R_{T_1'}} = \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{R_{T_1}} - \frac{\Sigma (dx)_{T_2} (dx)_{T_1 T_2}}{\sin^2\varphi}, \quad \frac{1}{R_{T_2'}} = \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{R_{T_2}} - \frac{\Sigma (dx)_{T_1} (dx)_{T_2 T_1}}{\sin^2\varphi}.$$

Setzt man in (15) statt $\mathfrak{F}$ der Reihe nach die Grössen x, y, z, multiplicirt einmal mit $(dx)_{T_1'}$, $(dy)_{T_1'}$, $(dz)_{T_1'}$, dann mit $(dx)_{T_2'}$, $(dy)_{T_2'}$, $(dz)_{T_2'}$, und addirt jedesmal, so ergiebt sich:

$$(16) \quad \begin{cases} (d \log \nu_1)_{T_2} = \cos\varphi \left(\frac{1}{R_{T_1'}} - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{R_{T_1}}\right) + \frac{1}{R_{T_2'}} - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{R_{T_2}}, \\ (d \log \nu_2)_{T_1} = \frac{1}{R_{T_1'}} - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{R_{T_1}} + \cos\varphi \left(\frac{1}{R_{T_2'}} - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{R_{T_2}}\right). \end{cases}$$

Auf Grund dieser Gleichungen lässt sich der zu beweisende Satz folgendermassen aussprechen: *Die Differentialformen T_1 und T_2 sind vollständige Differentiale, wenn:*

$$\frac{1}{R_{T_1'}} - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{R_{T_1}} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{R_{T_2'}} - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{R_{T_2}} = 0,$$

d. h. wenn die Tangenten der Curven $T_2 = 0$ bez. $T_1 = 0$ senkrecht sind zu den Verbindungslinien der geodätischen Krümmungsmittelpunkte der Curven $T_1 = 0$, $T_1' = 0$ bez. $T_2 = 0$, $T_2' = 0$. Nimmt man $T_1 = du$, $T_2 = dv$, so erhält das Quadrat des Linienelements die Gestalt:

$$ds^2 = du^2 + dv^2 + 2\cos\varphi\, du\, dv.$$

Es seien nun zwei nicht zu einander senkrechte Curvenscharen auf der Einheitskugel gegeben. Wir beantworten zunächst die von Herrn Guichard behandelte Frage, unter welcher Bedingung diese Scharen die sphärischen Bilder der Asymptotenlinien einer Fläche sind.

Betrachtet man die Curven $T_2 = 0$, $T_1 = 0$ auf der Einheitskugel (ξ, η, ζ) als die sphärischen Bilder zweier Curvenscharen auf einer Fläche (x, y, z), so hat man:

$$dx = (dx)_{T_1} T_1 + (dx)_{T_2} T_2,$$

wo aber $(dx)_{T_1}$, $(dx)_{T_2}$ u. s. f. nicht Richtungscosinus sind.

Da die Asymptotenlinien einer Fläche senkrecht zu ihren sphärischen Bildern verlaufen, wird, falls die Curven $T_2 = 0$, $T_1 = 0$ auf der Fläche mit den Asymptotenlinien der Fläche zusammenfallen:

$$dx = \lambda\, (d\xi)_{T_1'}\, T_1 + \mu\, (d\xi)_{T_2'}\, T_2,$$

wo λ und μ Proportionalitätsfactoren bezeichnen. Die Richtungscosinus der Normalen der Fläche sind ξ, η, ζ, und weil allgemein, wie aus (15) hervorgeht:

$$\sum \xi\, (dx)_{T_1 T_2} = \sum \xi\, (dx)_{T_2 T_1}$$

oder:

$$\sum (d\xi)_{T_1} (dx)_{T_2} = \sum (d\xi)_{T_2} (dx)_{T_1},$$

so folgt:

$$\lambda = \mu.$$

Damit die Differentialform dx ein vollständiges Differential sei, muss die Beziehung:

$$\lambda\left((d\xi)_{T_1' T_2} - (d\xi)_{T_2' T_1}\right) + (d\lambda)_{T_2} (d\xi)_{T_1'} - (d\lambda)_{T_1} (d\xi)_{T_2'}$$
$$= \lambda\left((d\xi)_{T_1'} (d \log \nu_1)_{T_2} - (d\xi)_{T_2'} (d \log \nu_2)_{T_1}\right)$$

erfüllt sein. Stellt man die entsprechenden Bedingungen für dy, dz auf, so folgt:

$$(17)\quad \begin{cases} \lambda \sin\varphi\, (d \log \nu_1)_{T_2} = (d\lambda)_{T_2} \sin\varphi \\ \qquad + \lambda\left\{\sum (d\xi)_{T_2} (d\xi)_{T_1' T_2} - \sum (d\xi)_{T_2} (d\xi)_{T_2' T_1}\right\}, \\ \lambda \sin\varphi\, (d \log \nu_2)_{T_1} = (d\lambda)_{T_1} \sin\varphi \\ \qquad - \lambda\left\{\sum (d\xi)_{T_1} (d\xi)_{T_1' T_2} - \sum (d\xi)_{T_1} (d\xi)_{T_2' T_1}\right\}. \end{cases}$$

Aber:

$$\sum (d\xi)_{T_2} (d\xi)_{T_1' T_2} = \cos\varphi\, (d\varphi)_{T_2} + \operatorname{cotg}\varphi \sum (d\xi)_{T_1} (d\xi)_{T_2^2}$$

und:

$$\sum (d\xi)_{T_1} (d\xi)_{T_2^2} = -\sin\varphi\, (d\varphi)_{T_2} - \sum (d\xi)_{T_2} (d\xi)_{T_1 T_2}.$$

Bei Anwendung der Abkürzungen:

$$\frac{1}{R_{T_1'}} - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{R_{T_1}} = A, \quad \frac{1}{R_{T_2'}} - \frac{\operatorname{cotg}\varphi}{R_{T_2}} = B$$

geht daher die erste Gleichung (17) über in:

$$(d\lambda)_{T_2} = 2\lambda B,$$

und entsprechend findet man an Stelle der zweiten:

$$(d\lambda)_{T_1} = 2\lambda A.$$

Die fragliche Bedingung verlangt also, dass der Ausdruck

$$A T_1 + B T_2$$

ein vollständiges Differential sei, oder dass die Beziehung bestehe:

$$(dA)_{T_2} - (dB)_{T_1} = (A^2 - B^2) \cos\varphi,$$

in welchem Fall sich λ und danach x, y, z durch Quadraturen bestimmen. Um die geometrische Bedeutung von λ zu finden, beachten wir, dass der reciproke Werth des Krümmungsradius eines Normalschnitts der Fläche (x, y, z) durch den Ausdruck:

$$-\frac{2 \sin\varphi\, T_1 T_2}{\lambda\,(T_1^2 - 2\cos\varphi\, T_1 T_2 + T_2^2)}$$

geliefert wird. Folglich ist $-\frac{1}{\lambda^2}$ das Krümmungsmass der Fläche. Besteht die vorige Bedingungsgleichung in der Art, dass $A = B = 0$, so wird λ constant. Die sphärischen Bilder der Asymptotenlinien einer Fläche von constantem, negativem Krümmungsmass besitzen also die in obigem Satz mitgetheilten Eigenschaften.

Die Brennpunkte eines Strahlensystems liegen auf zwei Flächen, welche man die *Brennflächen* des Systems nennt. Die Mittelpunkte der die beiden Brennpunkte eines Strahls verbindenden Strecke liegen auf der sogenannten *Mittelpunktsfläche* des Systems. Wir stellen zunächst die Differentiale der Coordinaten der letzteren durch lineare Formen von S_1 und S_2 dar.

Da:

$$dx_0 = \delta x_0 + \xi \sum \xi \, dx_0,$$

so wird, falls:

$$\sum \xi \, dx_0 = p_1 S_1 + p_2 S_2$$

gesetzt wird:

$$dx_0 = S_1(-\varrho_1 \varkappa_3 + p_1 \xi) + S_2(-\varrho_2 \varkappa_4 + p_2 \xi).$$

Sollen x_0, y_0, z_0 die Coordinaten der Punkte der Mittelpunktsfläche sein, so ist ϱ_2 durch $-\varrho_1$ zu ersetzen. Wir schreiben dann ϱ statt ϱ_1 und erhalten:

$$dx_0 = S_1(-\varrho \varkappa_3 + p_1 \xi) + S_2(\varrho \varkappa_4 + p_2 \xi).$$

Man nehme nun $T_1 = S_1$, $T_2 = S_2$. Dann sind die Grössen φ, A und B bestimmt. Ferner sei:

$$(dx)_{T_1'} = \varkappa_3', \quad (dy)_{T_1'} = \lambda_3', \quad (dz)_{T_1'} = \mu_3',$$
$$(dx)_{T_2'} = \varkappa_4', \quad (dy)_{T_2'} = \lambda_4', \quad (dz)_{T_2'} = \mu_4'.$$

Die Differentialform dx_0 ist ein vollständiges Differential. Folglich hat man:

$$-(d\varrho)_{S_2}\varkappa_3 - \varrho(d\varkappa_3)_{S_2} + (dp_1)_{S_2}\xi + p_1\varkappa_4 - (d\varrho)_{S_1}\varkappa_4 - \varrho(d\varkappa_4)_{S_1} - (dp_2)_{S_1}\xi - p_2\varkappa_3$$
$$= (A\cos\varphi + B)(-\varrho\varkappa_3 + p_1\xi) - (A + B\cos\varphi)(\varrho\varkappa_4 + p_2\xi).$$

Multiplicirt man diese Gleichung und die entsprechenden aus dy_0 und dz_0 hergeleiteten der Reihe nach mit $\varkappa_3', \lambda_3', \mu_3'$, dann mit $\varkappa_4', \lambda_4', \mu_4'$, endlich mit ξ, η, ζ und addirt jedesmal, so ergiebt sich, da:

$$\sum \varkappa_3'(d\varkappa_3)_{S_2} = -A\sin\varphi, \qquad \sum \varkappa_3'(d\varkappa_4)_{S_1} = \cos\varphi \sin\varphi\, B,$$
$$\sum \varkappa_4'(d\varkappa_3)_{S_2} = A\cos\varphi\sin\varphi, \quad \sum \varkappa_4'(d\varkappa_4)_{S_1} = -B\sin\varphi,$$

das Gleichungssystem:

$$(d\varrho)_{S_1} - p_1 - 2\varrho A = 0,$$
$$(d\varrho)_{S_2} - p_2 - 2\varrho B = 0,$$
$$(dp_1)_{S_2} - (dp_2)_{S_1} + 2\varrho\cos\varphi = p_1(A\cos\varphi + B) - p_2(A + B\cos\varphi).$$

Ersetzt man in der dritten dieser Gleichungen die Grössen p_1 und p_2 durch ihre den beiden ersten Gleichungen entnommenen Werthe, so entsteht für ϱ eine Laplace'sche Differentialgleichung. Nach Integration derselben erfordert die Bestimmung von x_0, y_0, z_0, und damit die Bestimmung eines Strahlensystems mit vorgeschriebenem sphärischen Bilde seiner abwickelbaren Flächen nur noch Quadraturen. (Guichard l. c. S. 344.)

Wir machen jetzt die Voraussetzung, dass A und B verschwinden. Dann ist:

$$(d\varrho)_{s_1 s_2} = (d\varrho)_{s_2 s_1},$$

und die dritte Gleichung des obigen Systems nimmt die Form an:

$$(d\varrho)_{s_1 s_2} + \varrho \cos\varphi = 0.$$

Sind X, Y, Z die Richtungscosinus der Normalen der Mittelpunktsfläche, so hat man:

$$X:Y:Z = -p_2\varkappa_3' + p_1\varkappa_4' + \varrho\sin\varphi\,\xi : -p_2\lambda_3' + p_1\lambda_4' + \varrho\sin\varphi\,\eta : -p_2\mu_3' + p_1\mu_4' + \varrho\sin\varphi\,\zeta.$$

Nun ist:

$$\sum(-p_2\varkappa_3' + p_1\varkappa_4' + \varrho\sin\varphi\,\xi)(-\varkappa_3(d\varrho)_{s_2} - \varrho(d\varkappa_3)_{s_2} + \xi(dp_1)_{s_2} + p_1\varkappa_4) = 0,$$

folglich verschwindet auch $\Sigma X (dx_0)_{s_1 s_2}$. Dies besagt aber, dass die Curven $S_1 = 0$, $S_2 = 0$, d. h. die Schnittlinien der Fläche mit den abwickelbaren Flächen des Strahlensystems, conjugirte Curven sind. (Guichard l. c. S. 345.)

Die Coordinaten der Punkte der beiden Brennflächen werden:

$$x_1 = x_0 + \varrho\xi, \quad y_1 = y_0 + \varrho\eta, \quad z_1 = z_0 + \varrho\zeta,$$
$$x_2 = x_0 - \varrho\xi, \quad y_2 = y_0 - \varrho\eta, \quad z_2 = z_0 - \varrho\zeta.$$

Man hat somit:

$$dx_1 = 2p_1\xi S_1 + 2\varrho\varkappa_4 S_2, \quad dx_2 = -2\varrho\varkappa_3 S_1 + 2p_2\xi S_2.$$

Die Richtungscosinus der Normalen der ersten Brennfläche (x_1, y_1, z_1) sind daher $\varkappa_4', \lambda_4', \mu_4'$; die der zweiten $\varkappa_3', \lambda_3', \mu_3'$. Folglich wird, wie bekannt, die erste von der Brennebene mit der Gleichung:

$$\sum(x - x_1)\varkappa_4' = 0,$$

die zweite von der Brennebene mit der Gleichung:

$$\sum(x - x_1)\varkappa_3' = 0$$

berührt. Die Schnittlinien der abwickelbaren Flächen des Strahlensystems mit den beiden Brennflächen sind zu einander senkrecht.

Weil ausserdem:

$$\sum \varkappa_4' (dp_1 \xi)_{s_2} = 0, \quad \sum \varkappa_3' (dp_2 \xi)_{s_1} = 0,$$

so sind diese Schnittlinien zugleich die Krümmungslinien der Brennflächen. (Guichard l. c. S. 346.)

§ 6. Erste und zweite Ableitungen nach Bogenlängen. Darstellung der zweiten Ableitungen der Coordinaten durch die ersten. Hervorstechende Arten orthogonaler Trajectorien.

Eine Schar orthogonaler Trajectorien der gegebenen Curvenschar wird festgelegt durch zwei Differentialgleichungen von der Form:

$$(1) \qquad \begin{cases} a_{13} dp + a_{23} dq + a_{33} dr = 0, \\ m dp + n dq = 0, \end{cases}$$

wo m und n Functionen von p, q, r bedeuten. Da die erste dieser Gleichungen bei jeder orthogonalen Trajectorie bestehen muss, dürfen die durch (1) bestimmten Linien einfach „orthogonale Trajectorien (oder Curven) $m dp + n dq = 0$“ genannt werden. Die im § 3 eingeführten Verrückungscomponenten:

$$\delta x = x_p dp + x_q dq, \quad \delta y = y_p dp + y_q dq, \quad \delta z = z_p dp + z_q dq$$

sind somit bezogen auf die orthogonalen Trajectorien $dp = 0$ und $dq = 0$, oder mit anderen Worten: die Curven $dp = 0$, $dq = 0$ sind als Coordinatenlinien betrachtet. Wir wollen an ihrer Stelle zwei beliebig gewählte, durch die Gleichungen:

$$m_1 dp + n_1 dq = 0, \quad m_2 dp + n_2 dq = 0$$

bestimmte Scharen von Coordinatenlinien einführen. Die Coefficienten m_1, n_1, m_2, n_2 haben dabei nur der Bedingung zu genügen, dass ihre Determinante $m_1 n_2 - m_2 n_1$ nicht verschwindet. Die beiden Scharen ändern sich nicht, wenn man ihre Gleichungen mit endlichen Factoren multiplicirt. Wir bezeichnen mit ν_1 und ν_2 zwei vorläufig unbestimmte Functionen von p, q, r und setzen:

$$\nu_1 (m_1 dp + n_1 dq) = \alpha_{11} dp + \alpha_{12} dq = T_1,$$
$$\nu_2 (m_2 dp + n_2 dq) = \alpha_{21} dp + \alpha_{22} dq = T_2,$$
$$a_{13} dp + a_{23} dq + a_{33} dr = \sqrt{a_{33}}\, T_0.$$

Das Differential einer Function $\mathfrak{F}$ von p, q, r wird eine lineare Form von T_1, T_2, T_0. Geben wir ihr die Gestalt:

$$d\mathfrak{F} = (d\mathfrak{F})_{T_1} T_1 + (d\mathfrak{F})_{T_2} T_2 + (d\mathfrak{F})_{T_0} T_0,$$

so ist:

(2) $(d\mathfrak{F})_{T_1}=\frac{\alpha_{22}\mathfrak{F}_p-\alpha_{21}\mathfrak{F}_q}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}}$, $(d\mathfrak{F})_{T_2}=\frac{-\alpha_{12}\mathfrak{F}_p+\alpha_{11}\mathfrak{F}_q}{\alpha_{11}\alpha_{22}-\alpha_{12}\alpha_{21}}$, $(d\mathfrak{F})_{T_0}=\frac{1}{\sqrt{a_{33}}}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial r}$.

Da:

$$(dx)_{T_0}=\xi,\quad (dy)_{T_0}=\eta,\quad (dz)_{T_0}=\zeta,$$

so ist $(d\mathfrak{F})_{T_0}$ als die Ableitung von $\mathfrak{F}$ nach der Bogenlänge der Curven der gegebenen Schar zu betrachten. Setzt man:

$$\nu_1=\frac{\sqrt{n_2{}^2E-2n_2m_2F+m_2{}^2G}}{m_1n_2-m_2n_1},\qquad \nu_2=\frac{\sqrt{n_1{}^2E-2n_1m_1F+m_1{}^2G}}{m_1n_2-m_2n_1},$$

so werden $(dx)_{T_1}$, $(dy)_{T_1}$, $(dz)_{T_1}$ die Richtungscosinus der Tangenten der Curven $T_2=0$, und $(dx)_{T_2}$, $(dy)_{T_2}$, $(dz)_{T_2}$ die der Tangenten der Curven $T_1=0$. Damit wird $(d\mathfrak{F})_{T_1}$ oder $(d\mathfrak{F})_{T_2}$ die Ableitung von $\mathfrak{F}$ nach der Bogenlänge der Curven $T_2=0$ oder $T_1=0$. Ersetzt man in dem partiellen Differential:

$$\delta\mathfrak{F}=\mathfrak{F}_p dp+\mathfrak{F}_q dq$$

dp und dq durch T_1 und T_2, so kommt:

$$\delta\mathfrak{F}=(d\mathfrak{F})_{T_1}T_1+(d\mathfrak{F})_{T_2}T_2,$$

daher ist:

$$d\mathfrak{F}=\delta\mathfrak{F}+(d\mathfrak{F})_{T_0}T_0.$$

Für das unter der Bedingung $T_0=0$ gebildete zweite Differential einer Function $\mathfrak{F}$ führen wir die Bezeichnungsweise ein:

$$\begin{aligned}\delta^2\mathfrak{F}&=\mathfrak{F}_{pp}dp^2+(\mathfrak{F}_{pq}+\mathfrak{F}_{qp})\,dp\,dq+\mathfrak{F}_{qq}dq^2+\mathfrak{F}_p d^2p+\mathfrak{F}_q d^2q\\&=(d\mathfrak{F})_{T_1^2}T_1{}^2+((d\mathfrak{F})_{T_1T_2}+(d\mathfrak{F})_{T_2T_1})\,T_1T_2+(d\mathfrak{F})_{T_2^2}T_2{}^2\\&\qquad+(d\mathfrak{F})_{T_1}\,\delta T_1+(d\mathfrak{F})_{T_2}\,\delta T_2.\end{aligned}$$

Hier ist:

$$(d\,(d\mathfrak{F})_{T_\alpha})_{T_\beta}=(d\mathfrak{F})_{T_\alpha T_\beta},\qquad (d\mathfrak{F})_{T_\alpha T_\alpha}=(d\mathfrak{F})_{T_\alpha^2}$$

gesetzt, während für δT_1 und δT_2 die Gleichungen bestehen:

$$\begin{aligned}\delta T_\nu=(\alpha_{\nu1})_p\,dp^2+((\alpha_{\nu1})'_q+(\alpha_{\nu2})_p)\,dp\,dq+(\alpha_{\nu2})_q\,dq^2+\alpha_{\nu1}\,d^2p\\+\alpha_{\nu2}d^2q,\ (\nu=1,2).\end{aligned}$$

Wir beschäftigen uns nun mit der Aufgabe, die zweiten Ableitungen der Coordinaten nach der Bogenlänge der Curven der gegebenen Schar und der Linien $T_2=0$, $T_1=0$ auszudrücken durch die ersten derartigen Ableitungen und durch geometrisch anschauliche Grössen. Die Lösung dieser Aufgabe erfordert die Einführung zweier weiterer Scharen von orthogonalen Trajectorien, die zugleich orthogonale Trajectorien der Linien $T_2=0$ oder $T_1=0$ sind.

Den Winkel der Linien $T_2=0$ und $T_1=$ nennen wir φ, so dass:

$$\sum(dx)_{T_1}(dx)_{T_2}=\cos\varphi.$$

Man nehme nun:

$$T_1' = \frac{T_2 + T_1 \cos\varphi}{\sin\varphi}, \quad T_2' = \frac{T_1 + T_2 \cos\varphi}{\sin\varphi}.$$

Dann wird:

$$(3) \quad (d\mathfrak{F})_{T_1'} = \frac{-\cos\varphi\,(d\mathfrak{F})_{T_1} + (d\mathfrak{F})_{T_2}}{\sin\varphi}, \quad (d\mathfrak{F})_{T_2'} = \frac{(d\mathfrak{F})_{T_1} - \cos\varphi\,(d\mathfrak{F})_{T_2}}{\sin\varphi},$$

und:

$$\sum (dx)^2_{T_1'} = \sum (dx)^2_{T_2'} = 1, \sum (dx)_{T_1}(dx)_{T_1'} = 0, \sum (dx)_{T_2}(dx)_{T_2'} = 0,$$

$$\sum (dx)_{T_1}(dx)_{T_2'} = \sum (dx)_{T_2}(dx)_{T_1'} = \sin\varphi, \sum (dx)_{T_1'}(dx)_{T_2'} = -\cos\varphi.$$

Dies zeigt, dass die Curven $T_2' = 0$, $T_1' = 0$ orthogonale Trajectorien der gegebenen Curvenschar sind, ferner, dass die Curven $T_2' = 0$ orthogonale Trajectorien der Curven $T_2 = 0$, und die Linien $T_1' = 0$ ebensolche der Linien $T_1 = 0$ sind. Endlich ist $(d\mathfrak{F})_{T_1'}$ oder $(d\mathfrak{F})_{T_2'}$ die Ableitung von $\mathfrak{F}$ nach der Bogenlänge der Curven $T_2' = 0$ oder $T_1' = 0$.

Es sind jetzt gewisse Krümmungen einer orthogonalen Trajectorie in Bezug auf die gegebene Curvenschar ins Auge zu fassen und die Definitionsgleichungen derselben auf die betrachteten Scharen $T_2 = 0$, $T_1 = 0$, $T_2' = 0$, $T_1' = 0$ anzuwenden.

Die *Normalkrümmung* legten wir durch die Formel fest:

$$\frac{1}{h} = -\frac{\Sigma\delta x\delta\xi}{\delta s^2} = \frac{\Sigma\xi\delta^2 x}{\delta s^2}.$$

Bezeichnen wir die Normalkrümmungen der Curven $T_2 = 0$, $T_1 = 0$ mit $\frac{1}{h_{T_1}}$, $\frac{1}{h_{T_2}}$, so folgt:

$$\frac{1}{h_{T_1}} = \sum \xi\,(dx)_{T_1^2}, \quad \frac{1}{h_{T_2}} = \sum \xi\,(dx)_{T_2^2}.$$

Die Krümmungsaxe einer orthogonalen Trajectorie schneidet die Normalebene der Curve (p = Const., q = Const.) in einem Punkt, welcher der Mittelpunkt ihrer *geodätischen Krümmung* $\frac{1}{R}$ genannt werden soll. Sind ξ', η', ζ' die Richtungscosinus der Geraden, welche im betrachteten Punkt sowohl zur Tangente (ξ, η, ζ) wie zur Richtung (δx, δy, δz) senkrecht ist, so hat man:

$$\frac{1}{R} = \frac{-\Sigma\delta x\delta\xi'}{\delta s^2} = \frac{\Sigma\xi'\delta^2 x}{\delta s^2}.$$

Bezeichnen wir die geodätischen Krümmungen der Curven $T_2 = 0$, $T_1 = 0$, $T_2' = 0$, $T_1' = 0$ der Reihe nach mit

$$\frac{1}{R_{T_1}}, \frac{1}{R_{T_2}}, \frac{1}{R_{T_1'}}, \frac{1}{R_{T_2'}},$$

so folgt:

$$\frac{1}{R_{T_1}} = \sum (dx)_{T_1'} (dx)_{T_1^2}, \qquad \frac{1}{R_{T_2}} = \sum (dx)_{T_2'} (dx)_{T_2^2},$$

$$\frac{1}{R_{T_1'}} = -\sum (dx)_{T_1'} (dx)_{T_1 T_1'} = \frac{\operatorname{cotg} \varphi}{R_{T_1}} - \frac{1}{\sin \varphi} \sum (dx)_{T_1'} (dx)_{T_1 T_2},$$

$$\frac{1}{R_{T_2'}} = -\sum (dx)_{T_2'} (dx)_{T_1 T_2'} = \frac{\operatorname{cotg} \varphi}{R_{T_2}} - \frac{1}{\sin \varphi} \sum (dx)_{T_2'} (dx)_{T_2 T_1}.$$

Es empfiehlt sich ausser der Normal- und geodätischen Krümmung noch eine dritte zu betrachten, die wir bei einer beliebigen Curve *Krümmung der Curve in Bezug auf eine Normalenfläche* nennen, d. h. in Bezug auf eine geradlinige Fläche, deren Erzeugende Normalen der Curve sind, und die wir als Grenzwerth folgendermassen festlegen. Die Coordinaten x, y, z der Punkte einer Curve seien Functionen der Veränderlichen t, und die Normalenfläche werde bestimmt durch Angabe der Richtungscosinus a, b, c ihrer Erzeugenden. Die zu den Erzeugenden und den zugehörigen Curventangenten senkrechten Geraden mögen die Richtungscosinus a', b', c' besitzen. Man betrachte nun ein reguläres Curvenstück PP', dessen Anfangs- und Endpunkt den Werthen t und $t + \Delta t$ entsprechen. Durch P geht eine Halbgerade, welche mit den positiven Theilen der Coordinatenaxen Winkel bildet, deren Cosinus a, b, c sind. Man ordne die Punkte P_α dieser Halbgeraden den Punkten P'_α des Curvenstücks PP' in der Weise zu, dass jede Strecke PP_α gleich der Bogenlänge PP'_α wird und lege durch die Punkte P_α gerade Linien L_α, welche den durch die Punkte P'_α gehenden Geraden (a', b', c') parallel sind. Die senkrechte Projection einer Geraden L_α auf die zu P gehörende Normalebene der Curve schneide die zu P gehörende Gerade (a', b', c') im Punkte Q_α. Dem Grenzfall $P_\alpha = P$ entspreche der Punkt $Q_\alpha = Q$. Dann soll Q als der zu P gehörende Krümmungsmittelpunkt der Curve in Bezug auf die zu Grunde gelegte Normalenfläche angesehen werden. Nimmt man die Abscisse von Q in Bezug auf P gleich l und bezeichnet, wie üblich, das Linienelement der Curve mit ds, so wird:

$$\frac{1}{l} = -\sum a \frac{da'}{ds} = \sum a' \frac{da}{ds},$$

und die Coordinaten von Q werden:

$$x' = x + la', \quad y' = y + lb', \quad z' = z + lc'.$$

Man darf hierbei nicht ausser Acht lassen, dass die Wahl der Halbgeraden (a, b, c) von Einfluss ist. Legt man die Halbgeraden $(-a, -b, -c)$ zu Grunde, so erhält man als Krümmungsmittelpunkt den dem Punkte (x', y', z') symmetrisch entsprechenden Punkt mit den Coordinaten

$$x'' = x - la', \quad y'' = y - lb', \quad z'' = z - lc'.$$

Die Krümmung $\frac{1}{l}$ verschwindet, wenn die Normalenfläche (a, b, c) abwickelbar ist, in welchem Fall auch die Normalenfläche (a', b', c') abwickelbar ist. Lässt man bei einer krummen Linie die Erzeugenden der Normalenfläche mit den Binormalen der Linie zusammenfallen, so wird $\frac{1}{l}$ die zweite Krümmung der Linie.

Der entwickelte Begriff der Krümmung einer Curve in Bezug auf eine Normalenfläche lässt sich in doppelter Weise für die Krümmungslehre der Curvenscharen fruchtbar machen, indem man entweder längs einer orthogonalen Trajectorie die Tangenten (ξ, η, ζ), oder längs einer Curve $p =$ Const., $q =$ Const. die Tangenten ein und derselben Schar orthogonaler Trajectorien ins Auge fasst. Auf diese Weise erhält man für die Krümmung der Curven $T_2 = 0$, $T_1 = 0$, $T_2' = 0$, $T_1' = 0$ in Bezug auf die Normalenfläche (ξ, η, ζ) die Werthe:

$$\frac{1}{l_{T_1}} = \sum (dx)_{T_1'} (d\xi)_{T_1} = \frac{1}{\sin\varphi}\left\{\frac{\cos\varphi}{h_{T_1}} + \sum (dx)_{T_2} (d\xi)_{T_1}\right\},$$

$$\frac{1}{l_{T_2}} = \sum (dx)_{T_2'} (d\xi)_{T_2} = \frac{1}{\sin\varphi}\left\{\sum (dx)_{T_1} (d\xi)_{T_2} + \frac{\cos\varphi}{h_{T_2}}\right\},$$

$$\frac{1}{l_{T_1'}} = \sum (dx)_{T_1} (d\xi)_{T_1'} = \frac{1}{\sin\varphi}\left\{\frac{\cos\varphi}{h_{T_1}} + \sum (dx)_{T_1} (d\xi)_{T_2}\right\},$$

$$\frac{1}{l_{T_2'}} = \sum (dx)_{T_2} (d\xi)_{T_2'} = \frac{1}{\sin\varphi}\left\{\sum (dx)_{T_2} (d\xi)_{T_1} + \frac{\cos\varphi}{h_{T_2}}\right\},$$

so dass:

$$\frac{1}{l_{T_1}} + \frac{1}{l_{T_2}} = \frac{1}{l_{T_1'}} + \frac{1}{l_{T_2'}}.$$

Für die Krümmung $\frac{1}{L_{T_1}}$ bez. $\frac{1}{L_{T_2}}$ einer Curve $p =$ Const., $q =$ Const. in Bezug auf die Normalenfläche $((dx)_{T_1}, (dy)_{T_1}, (dz)_{T_1})$ bez. $((dx)_{T_2}, (dy)_{T_2}, (dz)_{T_2})$ erhält man:

$$\frac{1}{L_{T_1}} = \sum (dx)_{T_1'} (dx)_{T_1 T_0} = \frac{1}{\sin\varphi} \sum (dx)_{T_2} (dx)_{T_1 T_0},$$

$$\frac{1}{L_{T_2}} = \sum (dx)_{T_2'} (dx)_{T_2 T_0} = \frac{1}{\sin\varphi} \sum (dx)_{T_1} (dx)_{T_2 T_0},$$

so dass:

$$\frac{1}{L_{T_1}} + \frac{1}{L_{T_2}} = -(d\varphi)_{T_0}. \tag{4}$$

Diese Gleichung spricht eine allgemeine Eigenschaft der in Rede stehenden Krümmung aus, indem die Summe der Krümmungen einer Curve in Bezug auf zwei Normalenflächen vermehrt um die Ableitung des Winkels der beiden Flächen nach der Bogenlänge der Curve den Werth Null ergiebt.

Wir fassen endlich auf den durch den Punkt (x, y, z) gehenden Tangenten der Curven $T_2 = 0$, $T_1 = 0$ noch zwei weitere Punkte ins Auge, nämlich die Schnittpunkte dieser Tangenten mit der zum Punkt (x, y, z) gehörenden Krümmungsaxe der Curve $p =$ Const., $q =$ Const. Wir bezeichnen den Halbmesser der ersten Krümmung dieser Curve mit ϱ, die Richtungscosinus ihrer Hauptnormalen mit a_1, b_1, c_1, die ihrer Binormalen mit a_2, b_2, c_2. Man hat dann:

$$(5) \qquad a_1 = \varrho (d\xi)_{T_0}, \qquad a_2 = \varrho (\eta (d\zeta)_{T_0} - \zeta (d\eta)_{T_0}).$$

Der Schnittpunkt der Krümmungsaxe mit der Tangente der Curve $T_2 = 0$ besitze in Bezug auf den Punkt (x, y, z) die Abscisse P_{T_1}. Für die Coordinaten dieses Schnittpunkts gelten einmal die Ausdrücke:

$$x + (dx)_{T_1} P_{T_1}, \quad y + (dy)_{T_1} P_{T_1}, \quad z + (dz)_{T_1} P_{T_1},$$

andererseits aber, wenn der Schnittpunkt vom Mittelpunkt der ersten Krümmung der Curve $p =$ Const., $q =$ Const. den Abstand ϱ' hat, auch die Ausdrücke:

$$x + \varrho^2 (d\xi)_{T_0} + \varrho\varrho' (\eta (d\zeta)_{T_0} - \zeta (d\eta)_{T_0}), \text{ u. s. f.}$$

Daher hat man:

$$\frac{1}{P_{T_1}} = \sum (d\xi)_{T_0} (dx)_{T_1}.$$

Für die Abscissen der Schnittpunkte der Tangenten der Curven $T_1 = 0$, $T_2' = 0$, $T_1' = 0$ mit jener Krümmungsaxe in Bezug auf den Punkt (x, y, z) ergiebt sich entsprechend:

$$\frac{1}{P_{T_2}} = \sum (d\xi)_{T_0} (dx)_{T_2}, \quad \frac{1}{P_{T_1'}} = \sum (d\xi)_{T_0} (dx)_{T_1'}, \quad \frac{1}{P_{T_2'}} = \sum (d\xi)_{T_0} (dx)_{T_2'}.$$

Die entwickelten Formeln setzen uns in den Stand, die gesuchten Ausdrücke für die zweiten Ableitungen der Coordinaten nach den Bogenlängen der Curven $p =$ Const., $q =$ Const.; $T_2 = 0$; $T_1 = 0$ herzustellen. Man erhält für die Coordinate x:

$$(6) \left\{ \begin{aligned} &(dx)_{T_1^2} = \frac{(dx)_{T_1'}}{R_{T_1}} + \frac{\xi}{h_{T_1}}, \\ &(dx)_{T_1 T_2} = \left(\frac{\cos\varphi}{R_{T_1}} - \frac{\sin\varphi}{R_{T_1'}}\right)(dx)_{T_1'} + \left(\frac{\cos\varphi}{h_{T_2}} - \frac{\sin\varphi}{l_{T_2}}\right)\xi, \\ &(dx)_{T_1 T_0} = \frac{(dx)_{T_1'}}{L_{T_1}} - \frac{\xi}{P_{T_1}}, \\ &(dx)_{T_2 T_1} = \left(\frac{\cos\varphi}{R_{T_2}} - \frac{\sin\varphi}{R_{T_2'}}\right)(dx)_{T_2'} + \left(\frac{\cos\varphi}{h_{T_1}} - \frac{\sin\varphi}{l_{T_1}}\right)\xi, \\ &(dx)_{T_2^2} = \frac{(dx)_{T_2'}}{R_{T_2}} + \frac{\xi}{h_{T_2}}, \qquad (dx)_{T_2 T_0} = \frac{(dx)_{T_2'}}{L_{T_2}} - \frac{\xi}{P_{T_2}}, \end{aligned} \right.$$

$$(6)\quad \begin{cases} (d\xi)_{T_1} = -\dfrac{(dx)_{T_1}}{h_{T_1}} + \dfrac{(dx)_{T_1'}}{l_{T_1}}, \quad (d\xi)_{T_2} = -\dfrac{(dx)_{T_2}}{h_{T_2}} + \dfrac{(dx)_{T_2'}}{l_{T_2}}, \\ \qquad\qquad (d\xi)_{T_0} = \dfrac{(dx)_{T_1}}{P_{T_1}} + \dfrac{(dx)_{T_1'}}{P_{T_1'}}. \end{cases}$$

Hieraus gehen die entsprechenden Gleichungen für die Coordinaten y und z durch gleichzeitige Vertauschung von x, ξ mit y, η oder z, ζ hervor.

Das Verschwinden eines der in diesen Gleichungen auftretenden Coefficienten darf als hervorstechende geometrische Eigenschaft der betrachteten Curvenscharen aufgefasst werden. Verschwindet $\frac{1}{l_{T_1}}$ oder $\frac{1}{l_{T_2}}$, so sind die Curven $T_2 = 0$ oder $T_1 = 0$ Krümmungslinien zweiter Art.

Eine orthogonale Trajectorie, deren Normalkrümmung überall verschwindet, soll eine *Asymptotenlinie* der Curvenschar heissen. Ist eine solche nicht gerade, so fallen ihre Binormalen mit den Tangenten (ξ, η, ζ) zusammen. Falls $\frac{1}{h_{T_1}}$ oder $\frac{1}{h_{T_2}}$ Null ist, sind die Curven $T_2 = 0$ oder $T_1 = 0$ Asymptotenlinien.

Eine orthogonale Trajectorie, deren geodätische Krümmung überall verschwindet, soll eine *geodätische Linie* der Curvenschar genannt werden. Ist eine solche nicht gerade, so fallen ihre Hauptnormalen mit den Tangenten (ξ, η, ζ) zusammen. Falls $\frac{1}{R_{T_1}}$ oder $\frac{1}{R_{T_2}}$ verschwindet, sind die Curven $T_2 = 0$ oder $T_1 = 0$ geodätische Linien.

Eine orthogonale Trajectorie, deren Tangenten zugleich Hauptnormalen oder Binormalen der Curven $p = \text{Const.}$, $q = \text{Const.}$ sind, soll eine *Hauptnormallinie* oder *Binormallinie* der Curvenschar heissen. Verschwindet $\frac{1}{P_{T_1}}$ oder $\frac{1}{P_{T_2}}$, so sind die Curven $T_2 = 0$ oder $T_1 = 0$ Binormallinien, wenn aber $\frac{1}{P_{T_1'}}$ oder $\frac{1}{P_{T_2'}}$ gleich Null, so sind die Curven $T_2 = 0$ oder $T_1 = 0$ Hauptnormallinien.

Verschwindet $\frac{1}{L_{T_1}}$ oder $\frac{1}{L_{T_2}}$, so bilden die Tangenten der Curven $T_2 = 0$ oder $T_1 = 0$ längs der Curven $p = \text{Const.}$, $q = \text{Const.}$ abwickelbare Flächen.

Es erübrigt noch, die Coefficienten von $(dx)_{T_1 T_2}$ und $(dx)_{T_2 T_1}$ zu betrachten. Setzen wir zur Abkürzung:

$$(dx)_{T_1 T_2} = \beta_{12}\,(dx)_{T_1'} + \Theta_{12}\,\xi, \quad (dx)_{T_2 T_1} = \beta_{21}\,(dx)_{T_2'} + \Theta_{21}\,\xi,$$

so besagt die Gleichung $\beta_{12} = 0$ bei endlichen Werthen von R_{T_1} und $R_{T_1'}$, dass die Tangenten der Curven $T_1 = 0$ senkrecht sind zu den

Verbindungslinien der geodätischen Krümmungsmittelpunkte der Curven $T_2 = 0$ und $T_2' = 0$. Ebenso bedeutet die Gleichung $\beta_{21} = 0$ bei endlichen Werthen von R_{T_2} und $R_{T_2'}$, dass die Tangenten der Curven $T_2 = 0$ senkrecht sind zu den Verbindungslinien der geodätischen Krümmungsmittelpunkte der Curven $T_1 = 0$ und $T_1' = 0$.

Eine Schar (A) orthogonaler Trajectorien soll einer Schar (B) ebensolcher *adjungirt* heissen, wenn in jedem regulären Punkt die Tangente einer Curve (A) senkrecht ist zu derjenigen Tangente ($\xi + \delta\xi$, $\eta + \delta\eta$, $\zeta + \delta\zeta$), welche der Tangente (ξ, η, ζ) längs der Curve (B) benachbart ist, oder mit anderen Worten, wenn die Tangente der Curve (A) die Richtung der Schnittlinie der beiden längs der Curve (B) benachbarten Normalebenen der Curven $p =$ Const., $q =$ Const. besitzt.

Da nun:

$$\Theta_{12} = -\sum (dx)_{T_1} (d\xi)_{T_2}, \quad \Theta_{21} = -\sum (dx)_{T_2} (d\xi)_{T_1},$$

so bedeutet die Gleichung $\Theta_{12} = 0$ oder $\Theta_{21} = 0$, dass die Curven $T_2 = 0$ oder $T_1 = 0$ den Curven $T_1 = 0$ oder $T_2 = 0$ adjungirt sind.

Es möge hier noch eine Bemerkung in Betreff der Krümmungslinien erster Art Platz finden. Eine Schar orthogonaler Trajectorien kann auch dadurch festgelegt werden, dass das Verhältniss $T_1 : T_2$ gleich einer Function von p, q, r gesetzt wird. Für die Normalkrümmung der betreffenden Trajectorien folgt dann:

$$\frac{1}{h} = \frac{\Theta_{11} T_1^2 + (\Theta_{12} + \Theta_{21}) T_1 T_2 + \Theta_{22} T_2^2}{T_1^2 + 2\cos\varphi\, T_1 T_2 + T_2^2},$$

wo zur Abkürzung:

$$\frac{1}{h_{T_1}} = \Theta_{11}, \quad \frac{1}{h_{T_2}} = \Theta_{22}$$

gesetzt ist, und die Gleichung der Krümmungslinien erster Art wird:

$$T_1^2 \left(\frac{\Theta_{12} + \Theta_{21}}{2} - \Theta_{11} \cos\varphi\right) + (\Theta_{22} - \Theta_{11}) T_1 T_2 + \left(\Theta_{22} \cos\varphi - \frac{1}{2} (\Theta_{12} + \Theta_{21})\right) T_2^2 = 0.$$

Damit die fraglichen Krümmungslinien von den Curven $T_2 = 0$, $T_1 = 0$ gebildet werden, muss:

$$\frac{1}{2} (\Theta_{12} + \Theta_{21}) - \Theta_{11} \cos\varphi = 0,$$

$$\frac{1}{2} (\Theta_{12} + \Theta_{21}) - \Theta_{22} \cos\varphi = 0$$

sein. Würde hier die Determinante $\Theta_{11} - \Theta_{22}$ verschwinden, so hätten wir es mit einer isotropen Curvenschar zu thun. Somit lauten die Bedingungen:

$$\cos\varphi = 0, \quad \Theta_{12} + \Theta_{21} = 0,$$

oder:

$$(7) \qquad \cos\varphi = 0, \quad \frac{1}{l_{T_1}} + \frac{1}{l_{T_2}} = 0.$$

Die Krümmungslinien erster Art bilden also dasjenige System von zwei zu einander senkrechten Scharen orthogonaler Trajectorien, bei dem in jedem Punkt die Summe der Krümmungen in Bezug auf die Normalenflächen (ξ, η, ζ) verschwindet.

§ 7. Einfluss der Vertauschung zweier nach einander ausgeführter Ableitungen nach verschiedenen Bogenlängen. Die Krümmungslinien erster Art als Coordinatenlinien. Fundamentalgleichungen.

Sowie in den ersten beiden Paragraphen die Differenz $(d\mathfrak{F})_{T_1 T_0} - (d\mathfrak{F})_{T_0 T_1}$ ausgedrückt wurde durch die Ableitungen $(d\mathfrak{F})_{T_1}$ und $(d\mathfrak{F})_{T_0}$ und geometrisch anschauliche Grössen, sind jetzt die drei Differenzen $(d\mathfrak{F})_{T_1 T_2} - (d\mathfrak{F})_{T_2 T_1}$, $(d\mathfrak{F})_{T_1 T_0} - (d\mathfrak{F})_{T_0 T_1}$, $(d\mathfrak{F})_{T_2 T_0} - (d\mathfrak{F})_{T_0 T_2}$ darzustellen durch die Ableitungen $(d\mathfrak{F})_{T_1}$, $(d\mathfrak{F})_{T_2}$, $(d\mathfrak{F})_{T_0}$ und geometrisch anschauliche Grössen. Dies ist gleichbedeutend mit der Ermittelung der Integrabilitätsbedingungen einer linearen Form von T_1, T_2, T_0.

Wir setzen zur Abkürzung:

$$\alpha_1 = \frac{a_{13}}{a_{33}}, \qquad \alpha_2 = \frac{a_{23}}{a_{33}}.$$

Dann ist:

$$\mathfrak{F}_p = \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial p} - \alpha_1 \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial r}, \qquad \mathfrak{F}_q = \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial q} - \alpha_2 \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial r}.$$

Dies ergiebt:

$$(\mathfrak{F}_p)_q - (\mathfrak{F}_q)_p = ((\alpha_2)_p - (\alpha_1)_q)\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial r},$$

$$\frac{\partial\mathfrak{F}_p}{\partial r} - \left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial r}\right)_p = -\frac{\partial\alpha_1}{\partial r}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial r}, \quad \frac{\partial\mathfrak{F}_q}{\partial r} - \left(\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial r}\right)_q = -\frac{\partial\alpha_2}{\partial r}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial r}.$$

Andererseits hat man:

$$\mathfrak{F}_p = \alpha_{11}(d\mathfrak{F})_{T_1} + \alpha_{21}(d\mathfrak{F})_{T_2}, \quad \mathfrak{F}_q = \alpha_{12}(d\mathfrak{F})_{T_1} + \alpha_{22}(d\mathfrak{F})_{T_2}, \quad \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial r} = \sqrt{a_{33}}(d\mathfrak{F})_{T_0}.$$

Die Determinante $\alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21}$ werde gleich D gesetzt. Dann folgt zunächst:

$$(1) \qquad \begin{cases} EG - F^2 = D^2 \sin^2\varphi, \\ f - f' = D(\Theta_{12} - \Theta_{21}). \end{cases}$$

Ferner folgt:

$$(\mathfrak{F}_p)_q = (\alpha_{11})_q (d\mathfrak{F})_{T_1} + (\alpha_{21})_q (d\mathfrak{F})_{T_2} + \alpha_{11}(\alpha_{12}(d\mathfrak{F})_{T_1^2} + \alpha_{22}(d\mathfrak{F})_{T_1 T_2})$$
$$+ \alpha_{21}(\alpha_{12}(d\mathfrak{F})_{T_2 T_1} + \alpha_{22}(d\mathfrak{F})_{T_2^2}),$$

$$(\mathfrak{F}_q)_p = (\alpha_{12})_p (d\mathfrak{F})_{T_1} + (\alpha_{22})_p (d\mathfrak{F})_{T_2} + \alpha_{12}(\alpha_{11}(d\mathfrak{F})_{T_1^2} + \alpha_{21}(d\mathfrak{F})_{T_1 T_2})$$
$$+ \alpha_{22}(\alpha_{11}(d\mathfrak{F})_{T_2 T_1} + \alpha_{21}(d\mathfrak{F})_{T_2^2}).$$

Hieraus geht ein zweiter Ausdruck der Differenz $(\mathfrak{F}_p)_q - (\mathfrak{F}_q)_p$ hervor.

Setzt man ihn dem oben gefundenen Ausdruck gleich, so ergiebt sich die erste der gesuchten Beziehungen in der Form:

$$(2)\quad \begin{cases} (d\mathfrak{F})_{T_1 T_2} - (d\mathfrak{F})_{T_2 T_1} = \dfrac{(\alpha_{12})_p - (\alpha_{11})_q}{D}(d\mathfrak{F})_{T_1} + \dfrac{(\alpha_{22})_p - (\alpha_{21})_q}{D}(d\mathfrak{F})_{T_2} \\ \qquad + \dfrac{((\alpha_2)_p - (\alpha_1)_q)\sqrt{a_{33}}}{D}(d\mathfrak{F})_{T_0}. \end{cases}$$

Verfährt man entsprechend mit den Differenzen $\frac{\partial \mathfrak{F}_p}{\partial r} - \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial r}\right)_p$ und $\frac{\partial \mathfrak{F}_q}{\partial r} - \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial r}\right)_q$, so folgt weiter:

$$(3)\quad \begin{cases} (d\mathfrak{F})_{T_1 T_0} - (d\mathfrak{F})_{T_0 T_1} = \dfrac{\alpha_{21}\dfrac{\partial \alpha_{12}}{\partial r} - \alpha_{22}\dfrac{\partial \alpha_{11}}{\partial r}}{D\sqrt{a_{33}}}(d\mathfrak{F})_{T_1} + \dfrac{-\alpha_{22}\dfrac{\partial \alpha_{21}}{\partial r} + \alpha_{21}\dfrac{\partial \alpha_{22}}{\partial r}}{D\sqrt{a_{33}}}(d\mathfrak{F})_{T_2} \\ \qquad + \dfrac{1}{D}\left\{\alpha_{22}\left(\dfrac{1}{2}(\log a_{33})_p - \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial r}\right) - \alpha_{21}\left(\dfrac{1}{2}(\log a_{33})_q - \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial r}\right)\right\}(d\mathfrak{F})_{T_0}, \end{cases}$$

$$(4)\quad \begin{cases} (d\mathfrak{F})_{T_2 T_0} - (d\mathfrak{F})_{T_0 T_2} = \dfrac{\alpha_{12}\dfrac{\partial \alpha_{11}}{\partial r} - \alpha_{11}\dfrac{\partial \alpha_{12}}{\partial r}}{D\sqrt{a_{33}}}(d\mathfrak{F})_{T_1} + \dfrac{\alpha_{12}\dfrac{\partial \alpha_{21}}{\partial r} - \alpha_{11}\dfrac{\partial \alpha_{22}}{\partial r}}{D\sqrt{a_{33}}}(d\mathfrak{F})_{T_2} \\ \qquad + \dfrac{1}{D}\left\{\alpha_{11}\left(\dfrac{1}{2}(\log a_{33})_q - \dfrac{\partial \alpha_2}{\partial r}\right) - \alpha_{12}\left(\dfrac{1}{2}(\log a_{33})_p - \dfrac{\partial \alpha_1}{\partial r}\right)\right\}(d\mathfrak{F})_{T_0}. \end{cases}$$

Wir führen für die Coefficienten auf den rechten Seiten von (2), (3), (4) Abkürzungen ein und setzen:

$$(5)\quad \begin{cases} (d\mathfrak{F})_{T_1 T_2} - (d\mathfrak{F})_{T_2 T_1} = c_{11}(d\mathfrak{F})_{T_1} + c_{12}(d\mathfrak{F})_{T_2} + c_{10}(d\mathfrak{F})_{T_0}, \\ (d\mathfrak{F})_{T_1 T_0} - (d\mathfrak{F})_{T_0 T_1} = c_{21}(d\mathfrak{F})_{T_1} + c_{22}(d\mathfrak{F})_{T_2} + c_{20}(d\mathfrak{F})_{T_0}, \\ (d\mathfrak{F})_{T_2 T_0} - (d\mathfrak{F})_{T_0 T_2} = c_{31}(d\mathfrak{F})_{T_1} + c_{32}(d\mathfrak{F})_{T_2} + c_{30}(d\mathfrak{F})_{T_0}. \end{cases}$$

Nimmt man hier an Stelle von $\mathfrak{F}$ der Reihe nach x, y, z und vergleicht die entstehenden Beziehungen mit den entsprechenden des Systems (6) des vorigen Paragraphen, so ergeben sich neue Ausdrücke für die Grössen $c_{\mu\nu}$ in geometrisch anschaulicher Form, nämlich:

$$(6)\quad \begin{cases} c_{11} = -\dfrac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi\, R_{T_1}} + \dfrac{\cos\varphi}{R_{T_1'}} - \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi\, R_{T_2}} + \dfrac{1}{R_{T_2'}}, \\ c_{12} = \dfrac{\cos^2\varphi}{\sin\varphi\, R_{T_2}} - \dfrac{\cos\varphi}{R_{T_2'}} + \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi\, R_{T_1}} - \dfrac{1}{R_{T_1'}}, \\ c_{10} = \cos\varphi\left(\dfrac{1}{h_{T_2}} - \dfrac{1}{h_{T_1}}\right) - \sin\varphi\left(\dfrac{1}{l_{T_2}} - \dfrac{1}{l_{T_1}}\right), \\ c_{21} = -\operatorname{cotg}\varphi\left(\dfrac{1}{L_{T_1}} - \dfrac{1}{l_{T_1}}\right) + \dfrac{1}{h_{T_1}},\ c_{22} = \dfrac{1}{\sin\varphi}\left(\dfrac{1}{L_{T_1}} - \dfrac{1}{l_{T_1}}\right),\ c_{20} = -\dfrac{1}{P_{T_1}}, \\ c_{31} = \dfrac{1}{\sin\varphi}\left(\dfrac{1}{L_{T_2}} - \dfrac{1}{l_{T_2}}\right),\ c_{32} = -\operatorname{cotg}\varphi\left(\dfrac{1}{L_{T_2}} - \dfrac{1}{l_{T_2}}\right) + \dfrac{1}{h_{T_2}},\ c_{30} = -\dfrac{1}{P_{T_2}}. \end{cases}$$

Man könnte nun in (5) für $\mathfrak{F}$ der Reihe nach die neun Richtungscosinus ξ, $(dx)_{T_1}$, $(dx)_{T_2}$, u. s. f. nehmen und würde zwölf Differential-

gleichungen zwischen den verschiedenen Krümmungen erhalten. Allein die Verfolgung dieses mühsamen Weges hat wenig Zweck. Einmal wird man bei der Wahl krummliniger Coordinaten den rechtwinkligen den Vorzug geben, und dann wird man die Einführung der willkürlichen Functionen (m_1, n_1, m_2, n_2) vermeiden und solche Systeme orthogonaler Trajectorien benutzen, welche durch die gegebene Curvenschar allein bestimmt werden. Wir haben zwei derartige Systeme kennen gelernt, das der Krümmungslinien erster Art, und das der Haupt- und Binormallinien. Das letztere wird aber unbestimmt, falls die gegebene Curvenschar aus lauter geraden Linien besteht. Wir nehmen daher die Krümmungslinien erster Art zu Coordinatenlinien und führen unter dieser Voraussetzung gesonderte Bezeichnungen ein. Statt T_1 oder T_2 werde geschrieben $\mathfrak{S}_1$ oder $\mathfrak{S}_2$. Die erste Schar der fraglichen Krümmungslinien $(\mathfrak{S}_2 = 0)$ soll die sein, deren Tangenten die Richtungscosinus $\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1$ besitzen, während die Tangenten der zweiten Schar $(\mathfrak{S}_1 = 0)$ die Richtungscosinus $\varkappa_2, \lambda_2, \mu_2$ besitzen. Nehmen wir hier noch:

$$\alpha_{11} = \sigma_1, \quad \alpha_{12} = \sigma_2, \quad \alpha_{21} = \sigma_3, \quad \alpha_{22} = \sigma_4,$$

so folgt:

$$(7) \quad \begin{cases} \mathfrak{S}_1 = \sigma_1\, dp + \sigma_2\, dq, & \mathfrak{S}_2 = \sigma_3\, dp + \sigma_4\, dq, \\ \sigma_1 = \dfrac{E + F t_1}{V_1} = \dfrac{V_1 t_2}{t_2 - t_1}, & \sigma_2 = \dfrac{F + G t_1}{V_1} = -\dfrac{V_1}{t_2 - t_1}, \\ \sigma_3 = \dfrac{E + F t_2}{V_2} = \dfrac{-V_2 t_1}{t_2 - t_1}, & \sigma_4 = \dfrac{F + G t_2}{V_2} = \dfrac{V_2}{t_2 - t_1}, \end{cases}$$

$$\delta x = \varkappa_1 \mathfrak{S}_1 + \varkappa_2 \mathfrak{S}_2.$$

An die letzte dieser Gleichungen knüpfen wir folgende Bemerkung. (Vergl. Darboux, Leçons sur la théorie générale des surfaces. Bd. II. S. 3.) Man betrachte die Tangenten von vier durch den regulären Punkt (x, y, z) gehenden orthogonalen Trajectorien. Jede der letzteren ist Einzelcurve einer Schar, die dadurch bestimmt ist, dass das Verhältniss $\frac{dq}{dp}$ gleich einer Function von p, q, r gesetzt wird. Die fraglichen vier Functionen sollen mit $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ bezeichnet werden, und die entsprechenden Werthe von $\frac{\mathfrak{S}_2}{\mathfrak{S}_1}$ mit $\frac{\mathfrak{S}_{21}}{\mathfrak{S}_{11}}, \frac{\mathfrak{S}_{22}}{\mathfrak{S}_{12}}, \frac{\mathfrak{S}_{23}}{\mathfrak{S}_{13}}, \frac{\mathfrak{S}_{24}}{\mathfrak{S}_{14}}$. Das Doppelverhältniss der in Rede stehenden Tangenten ist:

$$\frac{\left(\dfrac{\mathfrak{S}_{21}}{\mathfrak{S}_{11}} - \dfrac{\mathfrak{S}_{23}}{\mathfrak{S}_{13}}\right)\left(\dfrac{\mathfrak{S}_{22}}{\mathfrak{S}_{12}} - \dfrac{\mathfrak{S}_{24}}{\mathfrak{S}_{14}}\right)}{\left(\dfrac{\mathfrak{S}_{21}}{\mathfrak{S}_{11}} - \dfrac{\mathfrak{S}_{24}}{\mathfrak{S}_{14}}\right)\left(\dfrac{\mathfrak{S}_{22}}{\mathfrak{S}_{12}} - \dfrac{\mathfrak{S}_{23}}{\mathfrak{S}_{13}}\right)} = \frac{(\tau_1 - \tau_3)(\tau_2 - \tau_4)}{(\tau_1 - \tau_4)(\tau_2 - \tau_3)}.$$

Die Gleichung $\mathfrak{F}(p, q) =$ Const. bestimmt eine von lauter Curven der gegebenen Schar gebildete Fläche. Man lege nun durch eine

Einzelcurve der Schar vier derartige Flächen und berechne die Grössen τ_ν mit Hülfe ihrer Gleichungen $\mathfrak{F}_\nu(p, q) = c_\nu$. Dadurch werden die Grössen τ_ν Functionen von p und q allein, somit auch das betrachtete Doppelverhältniss. Dies ist aber gleich dem Doppelverhältniss der Tangentialebenen der vier Flächen in einem Punkt der Curve, und wir sehen, dass es sich längs der Curve nicht ändert.

Wir bezeichnen ferner die Werthe $\frac{1}{R_{T_1}}, \frac{1}{R_{T_2}}, \frac{1}{P_{T_1}}, \frac{1}{P_{T_2}}$ unter der waltenden Annahme, dass die Curven $T_2 = 0$, $T_1 = 0$ Krümmungslinien erster Art seien, der Reihe nach mit $\frac{1}{R_1}, \frac{1}{R_2}, \frac{1}{P_1}, \frac{1}{P_2}$. Für $\frac{1}{l_{T_1}}$ werde ε gesetzt, sodass nach (7) § 6 $\frac{1}{l_{T_2}}$ durch $-\varepsilon$ ersetzt werden muss. An Stelle von $\frac{1}{L_{T_1}}$ werde ϑ geschrieben, dann geht nach (4) § 6 $\frac{1}{L_{T_2}}$ in $-\vartheta$ über. Endlich sollen die Ableitungen $(d\mathfrak{F})_{T_1}$, $d\mathfrak{F})_{T_2}$, $(d\mathfrak{F})_{T_0}$ der Reihe nach mit $g_1(\mathfrak{F})$, $g_2(\mathfrak{F})$, $g_0(\mathfrak{F})$ bezeichnet werden, während die zweite Ableitung $(d\mathfrak{F})_{T_\alpha T_\beta}$ ersetzt werde durch $g_{\alpha\beta}(\mathfrak{F})$.

Die in den Gleichungen (2), (3), (4) einerseits und (6) andererseits enthaltenen Bestimmungen der Grössen $c_{\mu\nu}$ ergeben jetzt, falls:

$$\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3 = \sigma$$

genommen wird, die Beziehungen:

$$(8) \left\{ \begin{aligned}
c_{11} &= \frac{(\sigma_2)_p - (\sigma_1)_q}{\sigma} = \frac{1}{R_1}, \\
c_{12} &= \frac{(\sigma_4)_p - (\sigma_3)_q}{\sigma} = -\frac{1}{R_2}, \\
c_{10} &= \frac{(\alpha_2)_p - (\alpha_1)_q}{\sigma} \sqrt{a_{33}} = 2\varepsilon, \\
c_{21} &= \frac{\sigma_3 g_0(\sigma_2) - \sigma_4 g_0(\sigma_1)}{\sigma} = \frac{1}{h_1}, \\
c_{22} &= \frac{\sigma_3 g_0(\sigma_4) - \sigma_4 g_0(\sigma_3)}{\sigma} = \vartheta - \varepsilon, \\
c_{20} &= \frac{1}{\sigma}\left\{\sigma_4\left(\frac{1}{2}(\log a_{33})_p - \frac{\partial \alpha_1}{\partial r}\right) - \sigma_3\left(\frac{1}{2}(\log a_{33})_q - \frac{\partial \alpha_2}{\partial r}\right)\right\} = -\frac{1}{P_1}, \\
c_{31} &= \frac{\sigma_2 g_0(\sigma_1) - \sigma_1 g_0(\sigma_2)}{\sigma} = \varepsilon - \vartheta, \\
c_{32} &= \frac{\sigma_2 g_0(\sigma_3) - \sigma_1 g_0(\sigma_4)}{\sigma} = \frac{1}{h_2}, \\
c_{30} &= \frac{1}{\sigma}\left\{\sigma_1\left(\frac{1}{2}(\log a_{33})_q - \frac{\partial \alpha_2}{\partial r}\right) - \sigma_2\left(\frac{1}{2}(\log a_{33})_p - \frac{\partial \alpha_1}{\partial r}\right)\right\} = -\frac{1}{P_2}.
\end{aligned} \right.$$

Wir ziehen aus der fünften und siebenten dieser Gleichungen eine wichtige Folgerung. Nach (7) ist:

$$t_1 = -\frac{\sigma_3}{\sigma_4}, \quad t_2 = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2},$$

folglich hat man:

$$\vartheta - \varepsilon = \frac{\sigma_4^2}{\sigma} g_0(t_1) = \frac{\sigma_2^2}{\sigma} g_0(t_2).$$

Verschwindet also $\vartheta - \varepsilon$, so ist sowohl $\frac{\sigma_3}{\sigma_4}$ wie $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ von r unabhängig.

Die Gleichungen (2), (3) und (4) nehmen jetzt die Gestalt an:

$$(9)\quad \begin{cases} g_{12}(\mathfrak{F}) - g_{21}(\mathfrak{F}) = \frac{1}{R_1} g_1(\mathfrak{F}) - \frac{1}{R_2} g_2(\mathfrak{F}) + 2\varepsilon g_0(\mathfrak{F}), \\ g_{10}(\mathfrak{F}) - g_{01}(\mathfrak{F}) = \frac{1}{h_1} g_1(\mathfrak{F}) + (\vartheta - \varepsilon) g_2(\mathfrak{F}) - \frac{1}{P_1} g_0(\mathfrak{F}), \\ g_{20}(\mathfrak{F}) - g_{02}(\mathfrak{F}) = (\varepsilon - \vartheta) g_1(\mathfrak{F}) + \frac{1}{h_2} g_2(\mathfrak{F}) - \frac{1}{P_2} g_0(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (6) § 6 folgt:

$$(10)\quad \begin{cases} d\varkappa_1 = \left(\frac{\varkappa_2}{R_1} + \frac{\xi}{h_1}\right)\mathfrak{S}_1 + \left(-\frac{\varkappa_2}{R_2} + \varepsilon\xi\right)\mathfrak{S}_2 + \left(\vartheta\varkappa_2 - \frac{\xi}{P_1}\right) T_0, \\ d\varkappa_2 = \left(-\frac{\varkappa_1}{R_1} - \varepsilon\xi\right)\mathfrak{S}_1 + \left(\frac{\varkappa_1}{R_2} + \frac{\xi}{h_2}\right)\mathfrak{S}_2 + \left(-\vartheta\varkappa_1 - \frac{\xi}{P_2}\right) T_0, \\ d\xi = \left(-\frac{\varkappa_1}{h_1} + \varepsilon\varkappa_2\right)\mathfrak{S}_1 + \left(-\varepsilon\varkappa_1 - \frac{\varkappa_2}{h_2}\right)\mathfrak{S}_2 + \left(\frac{\varkappa_1}{P_1} + \frac{\varkappa_2}{P_2}\right) T_0. \end{cases}$$

Die Anwendung der Gleichungen (9) auf die Darstellungen (10) liefert die Differentialgleichungen:

$$(11)\quad \begin{cases} g_2\left(\frac{1}{h_1}\right) - g_1(\varepsilon) = \frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) - \frac{2\varepsilon}{P_1}, \\ g_1\left(\frac{1}{h_2}\right) + g_2(\varepsilon) = \frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1}\right) + \frac{2\varepsilon}{P_2}, \\ g_0\left(\frac{1}{h_1}\right) + g_1\left(\frac{1}{P_1}\right) = \frac{1}{P_1^2} + \frac{1}{h_1^2} + \frac{1}{P_2 R_1} - \varepsilon^2, \\ g_0(\varepsilon) - g_1\left(\frac{1}{P_2}\right) = \frac{1}{P_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{P_2}\right) + \varepsilon\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) + \vartheta\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right), \\ g_2\left(\frac{1}{R_1}\right) + g_1\left(\frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{h_1 h_2} + \frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2} + \varepsilon^2 + 2\varepsilon\vartheta, \\ g_0\left(\frac{1}{h_2}\right) + g_2\left(\frac{1}{P_2}\right) = \frac{1}{h_2^2} + \frac{1}{P_2^2} + \frac{1}{R_2 P_1} - \varepsilon^2, \\ g_0\left(\frac{1}{R_1}\right) - g_1(\vartheta) = \frac{1}{h_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{P_2}\right) - \frac{\varepsilon + \vartheta}{P_1} + \frac{\varepsilon - \vartheta}{R_2}, \\ g_0\left(\frac{1}{R_2}\right) + g_2(\vartheta) = \frac{1}{h_2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{P_1}\right) + \frac{\varepsilon + \vartheta}{P_2} - \frac{\varepsilon - \vartheta}{R_1}, \\ g_2\left(\frac{1}{P_1}\right) + g_0(\varepsilon) = \frac{1}{P_2}\left(\frac{1}{P_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \varepsilon\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) - \vartheta\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right). \end{cases}$$

Diese Gleichungen spielen in der Theorie der Curvenscharen dieselbe Rolle, wie die sogenannten Fundamentalgleichungen in der Flächentheorie.

Stellt man, wie es im § 4 angegeben wurde, die betrachtete Curvenschar mit Hülfe einer neuen Veränderlichen r_1 und zweier neuer Parameter p_1 und q_1 dar, so sind die mit den neuen Unabhängigen gebildeten Ableitungen $g_1(\mathfrak{F})$, $g_2(\mathfrak{F})$, $g_0(\mathfrak{F})$ gleich den entsprechenden mit den alten Unabhängigen gebildeten Ableitungen. Wir dürfen daher diese Ableitungen *invariabele Operationen* nennen. Ebenso ändern die Grössen $\frac{1}{R_1}$, $\frac{1}{R_2}$, $\frac{1}{P_1}$, $\frac{1}{P_2}$, ε und ϑ ihre Werthe nicht, falls sie mit Hülfe der neuen Unabhängigen berechnet werden. Aus diesem Grunde belegen wir die fraglichen Grössen, ebenso $\frac{1}{h_1}$ und $\frac{1}{h_2}$, mit dem gemeinsamen Namen *geometrische Invarianten.*

§ 8. Strahlensysteme. Schar ebener Curven. Orthogonale Trajectorien einer Flächenschar, die einem dreifach orthogonalen Flächensystem angehört.

Nach Beendigung der nothwendigen theoretischen Erörterungen wenden wir uns zu praktischen Fragen, die sich zunächst auf die Curven der gegebenen Schar beziehen sollen. Wann sind sie gerade Linien? Wann gekrümmte, ebene Linien?

Für die Richtungscosinus der Haupt- und Binormalen der fraglichen Curven fanden wir die Ausdrücke § 6 (5):

$$a_1 = \varrho g_0(\xi), \quad a_2 = \varrho(\eta g_0(\zeta) - \zeta g_0(\eta)),$$

wo ϱ den Halbmesser der ersten Krümmung bedeutet. Setzen wir ein- für allemal fest, dass die Vorzeichen der Cosinus $\varkappa_1$, $\varkappa_2$ u. s. f. so gewählt werden, dass:

$$\xi = \lambda_1\mu_2 - \mu_1\lambda_2, \quad \eta = \mu_1\varkappa_2 - \varkappa_1\mu_2, \quad \zeta = \varkappa_1\lambda_2 - \lambda_1\varkappa_2,$$

so folgt jetzt:

$$a_1 = \varrho\left(\frac{\varkappa_1}{P_1} + \frac{\varkappa_2}{P_2}\right), \quad a_2 = \varrho\left(-\frac{\varkappa_1}{P_2} + \frac{\varkappa_2}{P_1}\right), \tag{1}$$

$$\frac{1}{\varrho} = \sqrt{\frac{1}{P_1^2} + \frac{1}{P_2^2}}. \tag{2}$$

Die Curven der Schar sind also gerade Linien, wenn sowohl $\frac{1}{P_1}$ wie $\frac{1}{P_2}$ verschwindet. Nach (8) § 7 hat man dann:

$$\frac{1}{2}(\log a_{33})_p - \frac{\partial \frac{a_{13}}{a_{33}}}{\partial r} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{1}{2}(\log a_{33})_q - \frac{\partial \frac{a_{23}}{a_{33}}}{\partial r} = 0.$$

Es genügt also die Kenntniss der drei Grössen a_{13}, a_{23}, a_{33}, um zu entscheiden, ob man es mit einem Strahlensystem zu thun hat, oder nicht.

Für die zweite Krümmung erhalten wir nach der zweiten Frenet-schen Formel die Gleichung:

$$\frac{1}{\varrho'} = \sum a_1 g_0(a_2) = \varrho^2 \sum \left(\frac{\varkappa_1}{P_1} + \frac{\varkappa_2}{P_2}\right) g_0 \left(-\frac{\varkappa_1}{P_2} + \frac{\varkappa_2}{P_1}\right)$$

d. h.

$$(3) \qquad \frac{1}{\varrho'} = -\vartheta + g_0 \left(\operatorname{arctg} \frac{P_2}{P_1}\right).$$

Wir haben es also mit einer Schar ebener, gekrümmter Linien zu thun, wenn P_1 und P_2 im Allgemeinen endliche Werthe besitzen, und

$$(4) \qquad \vartheta = g_0 \left(\operatorname{arctg} \frac{P_2}{P_1}\right)$$

ist.

Wann ist die betrachtete Curvenschar eine Normalschar?

Nach (1) § 7 hat man:

$$(5) \qquad \frac{f - f'}{2\sqrt{EG - F^2}} = \varepsilon.$$

Folglich wird $\varepsilon = 0$ nach (4a) § 4 die gesuchte Bedingung.

Besteht die Gleichung (4), so sind die Ebenen der Einzelcurven der Schar zugleich Berührungsebenen einer Fläche, deren Coordinaten x_0, y_0, z_0 von p und q abhängen. Setzt man hier:

$$E_0 = \sum \left(\frac{\partial x_0}{\partial p}\right)^2, \quad G_0 = \sum \left(\frac{\partial x_0}{\partial q}\right)^2, \quad F_0 = \sum \frac{\partial x_0}{\partial p}\frac{\partial x_0}{\partial q},$$

und versteht unter u und v Functionen von p, q, r, so lassen sich die Coordinaten der Curvenschar in die Form bringen:

$$x = x_0 + \frac{\frac{\partial x_0}{\partial p}}{\sqrt{E_0}} u + \frac{\frac{\partial x_0}{\partial q}}{\sqrt{G_0}} v, \qquad y = y_0 + \frac{\frac{\partial y_0}{\partial p}}{\sqrt{E_0}} u + \frac{\frac{\partial y_0}{\partial q}}{\sqrt{G_0}} v,$$

$$z = z_0 + \frac{\frac{\partial z_0}{\partial p}}{\sqrt{E_0}} u + \frac{\frac{\partial z_0}{\partial q}}{\sqrt{G_0}} v.$$

Der Ausdruck $f - f'$ hängt jetzt ausser von u und v nur von E_0, F_0, G_0 ab.

Man halte nun u und v fest, während man an Stelle der Fläche (x_0, y_0, z_0) eine ihrer Biegungsflächen ins Auge fasst. Hierdurch wird jeder Curve $p =$ Const., $q =$ Const. der ersten Schar eine solche der zweiten Schar zugeordnet, wobei die zugeordnete nur der Lage, nicht der Form nach von der ursprünglichen verschieden ist, und die Grösse $f - f'$ sich gleich bleibt. Ist die Curvenschar eine Normalschar, so

geht ihr also diese Eigenschaft nicht verloren, wenn die Anordnung ihrer Einzelcurven durch eine Biegung der Fläche (x_0, y_0, z_0) geändert wird. Diesen Satz hat Ribaucour auf anderem Wege gefunden. (Journal de Mathém. T. VII. 1891. S. 251.)

Kehren wir nach dieser Abschweifung zur Gleichung (5) zurück! Da $\varepsilon = \frac{1}{l_{\mathfrak{S}_1}}$, so bilden für $\varepsilon = 0$ die Curventangenten (ξ, η, ζ) längs der Krümmungslinien erster Art abwickelbare Flächen. Somit sind die Krümmungslinien erster Art der Curvenschar zugleich die Krümmungslinien der Flächenschar, deren orthogonale Trajectorien die Curvenschar bilden.

Damit die fragliche Flächenschar einem dreifach orthogonalen Flächensystem angehört, müssen die Tangenten der Krümmungslinien nach dem Dupin'schen Satz längs jeder Curve $p =$ Const., $q =$ Const. abwickelbare Flächen bilden. Hierzu ist die eine weitere Bedingung $\vartheta = 0$ erforderlich. Es soll nun gezeigt werden, dass die beiden Bedingungen $\varepsilon = 0$, $\vartheta = 0$ auch hinreichend sind. Verschwindet ε, so besitzt nach § 3 die Differentialform T_0 einen integrirenden Factor, und man kann setzen:

$$T_0 = n\,dw.$$

Nach einer im vorigen Paragraphen gemachten Bemerkung sind die Quotienten $\frac{\sigma_1}{\sigma_2}$ und $\frac{\sigma_3}{\sigma_4}$, falls $\varepsilon - \vartheta = 0$, von r unabhängig, und die Differentialformen $\frac{\mathfrak{S}_1}{\sigma_2}$ und $\frac{\mathfrak{S}_2}{\sigma_4}$ besitzen somit integrirende Factoren, die nur von p und q abhängen. Es bestehen also Gleichungen von der Form:

$$\mathfrak{S}_1 = l\,du, \quad \mathfrak{S}_2 = m\,dv.$$

Das Quadrat des Linienelements im Raume hat allgemein den Ausdruck:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \mathfrak{S}_1^{\,2} + \mathfrak{S}_2^{\,2} + T_0^{\,2}.$$

Wir erhalten daher im Fall $\varepsilon = \vartheta = 0$:

$$ds^2 = l\,du^2 + m\,dv^2 + n\,dw^2.$$

Die Flächenscharen $u =$ Const., $v =$ Const., $w =$ Const. bilden also ein dreifach orthogonales System, und die gegebene Curvenschar besteht aus den Schnittlinien der Flächen $u =$ Const., $v =$ Const.

Der allgemeine Ausdruck für das Quadrat des Linienelements in den Differentialen dp, dq, dr sei:

$$a_{11}\,dp^2 + 2a_{12}\,dp\,dq + a_{22}\,dq^2 + 2a_{13}\,dp\,dr + 2a_{23}\,dq\,dr + a_{33}\,dr^2.$$

Um festzustellen, ob ε verschwindet oder nicht, hat man nur die Kenntniss der Coefficienten a_{13}, a_{23}, a_{33} nöthig. Wir werden jetzt

zeigen, dass die Kenntniss der sämmtlichen Coefficienten $a_{\mu\nu}$ genügt, um zu entscheiden, ob bei $\varepsilon = 0$ auch ϑ verschwindet oder nicht. Zu diesem Zweck leiten wir einen neuen Ausdruck für ϑ her unter der Voraussetzung $\varepsilon = 0$.

Das System (10) des vorigen Paragraphen ergiebt:

$$\vartheta = \sum \varkappa_2 g_0(\varkappa_1) = -\sum \varkappa_1 g_0(\varkappa_2),$$

so dass:

$$2\vartheta = \sum \varkappa_2 g_0(\varkappa_1) - \sum \varkappa_1 g_0(\varkappa_2).$$

Zur Umformung dieser Gleichung benutzen wir die Ausdrücke:

$$\varkappa_1 = \frac{x_p + x_q t_1}{V_1}, \quad \varkappa_2 = \frac{x_p + x_q t_2}{V_2}$$

und nehmen zuerst an, dass t_1 und t_2 endliche Werthe haben. Dann findet sich:

$$(6) \left\{ \begin{aligned} \sum \varkappa_2 g_0(\varkappa_1) - \sum \varkappa_1 g_0(\varkappa_2) = \frac{1}{V_1 V_2} \Big\{ (t_1 - t_2) \Big(\sum x_p g_0(x_q) - \sum x_q g_0(x_p) \Big) \\ + F g_0(t_1 - t_2) + G\,(t_2 g_0(t_1) - t_1 g_0(t_2)) \Big\}. \end{aligned} \right.$$

Nach (3) § 4 ist:

$$\sum x_p g_0(x_q) - \sum x_q g_0(x_p) = f' - f.$$

Die links stehende Summe verschwindet also mit ε. Die Grössen t_1 und t_2 sind die Wurzeln der Gleichung (7) § 4:

$$(7) \quad (F g_0(G) - G g_0(F)) t^2 + (E g_0(G) - G g_0(E)) t + E g_0(F) - F g_0(E) = 0,$$

somit ist:

$$\begin{aligned} (F g_{00}(G) - G g_{00}(F)) t^2 + (E g_{00}(G) - G g_{00}(E)) t + E g_{00}(F) - F g_{00}(E) \\ + g_0(t) \{ 2t (F g_0(G) - G g_0(F)) + E g_0(G) - G g_0(E) \} = 0. \end{aligned}$$

Wir schreiben diese Gleichung zur Abkürzung in der Form:

$$M + N g_0(t) = 0.$$

Ersetzt man in M die Grösse t^2 durch ihren der Gleichung (7) entnommenen Ausdruck, so folgt:

$$M = -\frac{\mathsf{A}\,(G t + F)}{F g_0(G) - G g_0(F)},$$

wo:

$$\mathsf{A} = \begin{vmatrix} E & F & G \\ g_0(E) & g_0(F) & g_0(G) \\ g_{00}(E) & g_{00}(F) & g_{00}(G) \end{vmatrix}.$$

Ferner ist:

$$N = (F g_0(G) - G g_0(F))\,(2t - t_1 - t_2).$$

Man hat also:

$$g_0(t_1) = \frac{\mathsf{A}}{(Fg_0(G) - Gg_0(F))^2}\,\frac{Gt_1 + F}{t_1 - t_2}, \quad g_0(t_2) = \frac{\mathsf{A}}{(Fg_0(G) - Gg_0(F))^2}\,\frac{Gt_2 + F}{t_2 - t_1},$$

und erhält bei $\varepsilon = 0$ an Stelle von (6):

$$\vartheta = \frac{\mathsf{A}\,(EG - F^2)}{V_1 V_2 (Fg_0(G) - Gg_0(F))^2 (t_2 - t_1)}.$$

Wenn $Fg_0(G) - Gg_0(F)$ verschwindet, ist eine Wurzel von (7) z. B. t_1 unendlich gross. Da jetzt:

$$F + Gt_2 = 0,$$

so kommt:

$$\varkappa_1 = \frac{x_q}{\sqrt{G}}, \quad \varkappa_2 = \frac{Gx_p - Fx_q}{\sqrt{G}\sqrt{EG - F^2}}.$$

Hier zeigt sich, dass bei $\varepsilon = 0$ auch die Differenz

$$\sum \varkappa_2 g_0(\varkappa_1) - \sum \varkappa_1 g_0(\varkappa_2)$$

verschwindet, und damit ϑ. Die Determinante A wird zu:

$$\frac{1}{G}(Gg_0(E) - Eg_0(G))(Gg_{00}(F) - Fg_{00}(G)),$$

verschwindet also ebenfalls. Folglich ist die Gleichung $\mathsf{A} = 0$ die nothwendige und hinreichende Bedingung des Verschwindens von ϑ, falls $\varepsilon = 0$. Dies führt darauf, den Werth von A im allgemeinen Fall zu ermitteln.

Man hat:

$$E = \sigma_1^2 + \sigma_3^2, \quad F = \sigma_1\sigma_2 + \sigma_3\sigma_4, \quad G = \sigma_2^2 + \sigma_4^2.$$

Aus dem System (8) § 7 folgt:

$$g_0(\sigma_1) = -\frac{\sigma_1}{h_1} - \sigma_3(\varepsilon - \vartheta), \quad g_0(\sigma_2) = -\frac{\sigma_2}{h_1} - \sigma_4(\varepsilon - \vartheta),$$

$$g_0(\sigma_3) = -\frac{\sigma_3}{h_2} + \sigma_1(\varepsilon - \vartheta), \quad g_0(\sigma_4) = -\frac{\sigma_4}{h_2} + \sigma_2(\varepsilon - \vartheta).$$

Daher ist:

$$g_0(E) = -2\left(\frac{\sigma_1^2}{h_1} + \frac{\sigma_3^2}{h_2}\right), \quad g_0(F) = -2\left(\frac{\sigma_1\sigma_2}{h_1} + \frac{\sigma_3\sigma_4}{h_2}\right),$$

$$g_0(G) = -2\left(\frac{\sigma_2^2}{h_1} + \frac{\sigma_4^2}{h_2}\right),$$

$$Fg_0(G) - Gg_0(F) = 2\sigma\sigma_2\sigma_4\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right),$$

$$Gg_0(E) - Eg_0(G) = -2\sigma(\sigma_1\sigma_4 + \sigma_2\sigma_3)\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right),$$

$$Eg_0(F) - Fg_0(E) = 2\sigma\sigma_1\sigma_3\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right),$$

$$\mathsf{A} = 4\sigma^3\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right)^2(\vartheta - \varepsilon).$$

Verschwindet also A, so ist ε gleich ϑ.

Ferner hat man:

$$\mathsf{A} = \frac{1}{(\sqrt{a_{33}})^3} \begin{vmatrix} E & F & G \\ \frac{\partial E}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial G}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} \end{vmatrix}$$

und:

$$E = a_{11} - \frac{a_{13}^2}{a_{33}}, \quad F = a_{12} - \frac{a_{13}\, a_{23}}{a_{33}}, \quad G = a_{22} - \frac{a_{23}^2}{a_{33}}.$$

Hiermit ist der Zusammenhang der Determinante A mit den Coefficienten des Quadrats des Linienelements klargelegt.

Denken wir uns die Bedingungen $\varepsilon = \vartheta = 0$ erfüllt und setzen wie oben:

$$\mathfrak{S}_1 = l\,du, \quad \mathfrak{S}_2 = m\,dv, \quad T_0 = n\,dw,$$

so ist für eine beliebige Function $\mathfrak{F}$ von p, q, r:

$$g_1(\mathfrak{F}) = \frac{1}{l}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial u}, \quad g_2(\mathfrak{F}) = \frac{1}{m}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial v}, \quad g_0(\mathfrak{F}) = \frac{1}{n}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial w}.$$

Die Differentialgleichungen (11) § 7 sind dann gleichbedeutend mit den von Lamé in den Leçons sur les coordonnées curvilignes et leurs diverses applications S. 80, 81 unter (14) und (15) aufgestellten Differentialgleichungen. Die Grössen $h_1, h_2, R_1, R_2, P_1, P_2$ werden von Lamé der Reihe nach mit $r', r'', r_2', r_1'', r_1, r_2$ bezeichnet.

§ 9. Cyclische Curvenscharen.

Eine Curvenschar, die aus lauter Kreisen zusammengesetzt ist, nennt man nach dem Vorgange Ribaucour's eine cyclische. (Vergl. Ribaucour, Comptes rendus Tome 76. S. 478, 830, sowie die Darstellung in Bianchi's Lezioni di geometria differenziale und Darboux's Leçons Bd. II.)

Der wichtigste von Ribaucour in Betreff dieser Curvenscharen aufgestellte Satz besagt, dass, wenn eine solche aus den orthogonalen Trajectorien einer Flächenschar besteht, letztere einem dreifach orthogonalen Flächensystem angehört. Ich werde von diesem Satze zwei Beweise folgen lassen, von denen der erste, schon veröffentlichte (Mathem. Annalen Bd. 44. S. 456), von einer bestimmten Form der analytischen Darstellung der Curvenschar ausgeht, der zweite die im § 7 entwickelten Beziehungen (11) benutzt.

Wir können eine doppelt unendliche Kreisschar durch die Gleichungen festlegen:

$$x = x_0 + R(\alpha_1 \cos r + \beta_1 \sin r),$$
$$y = y_0 + R(\alpha_2 \cos r + \beta_2 \sin r),$$
$$z = z_0 + R(\alpha_3 \cos r + \beta_3 \sin r).$$

Hier sind x_0, y_0, z_0 — die Coordinaten der von den Mittelpunkten der Kreise beschriebenen Fläche — sowie R; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ Functionen von p und q allein; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ sowie $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ sind die Richtungscosinus zweier zu einander senkrechter Geraden, mit $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ bezeichnen wir die Richtungscosinus der zu ihnen senkrechten Geraden. Setzt man:

$$c_{11} = \frac{\partial R}{\partial p} + \sin r \sum \beta_1 \frac{\partial x_0}{\partial p} + \cos r \sum \alpha_1 \frac{\partial x_0}{\partial p},$$

$$c_{21} = \frac{\partial R}{\partial q} + \sin r \sum \beta_1 \frac{\partial x_0}{\partial q} + \cos r \sum \alpha_1 \frac{\partial x_0}{\partial q},$$

$$c_{12} = \sum \gamma_1 \frac{\partial x_0}{\partial p} + R \cos r \sum \gamma_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial p} + R \sin r \sum \gamma_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial p},$$

$$c_{22} = \sum \gamma_1 \frac{\partial x_0}{\partial q} + R \cos r \sum \gamma_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial q} + R \sin r \sum \gamma_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial q},$$

so wird

$$x_p = (\alpha_1 \cos r + \beta_1 \sin r) c_{11} + \gamma_1 c_{12}, \quad x_q = (\alpha_1 \cos r + \beta_1 \sin r) c_{21} + \gamma_1 c_{22},$$

$$\xi_p = \frac{1}{R}\left((\alpha_1 \cos r + \beta_1 \sin r)\frac{\partial c_{11}}{\partial r} + \gamma_1 \frac{\partial c_{12}}{\partial r}\right),$$

$$\xi_q = \frac{1}{R}\left((\alpha_1 \cos r + \beta_1 \sin r)\frac{\partial c_{21}}{\partial r} + \gamma_1 \frac{\partial c_{22}}{\partial r}\right).$$

Damit die Kreise der Schar die orthogonalen Trajectorien einer Flächenschar sind, muss $f - f'$ verschwinden, d. h.

$$c_{11}\frac{\partial c_{21}}{\partial r} + c_{12}\frac{\partial c_{22}}{\partial r} = c_{21}\frac{\partial c_{11}}{\partial r} + c_{22}\frac{\partial c_{12}}{\partial r}. \tag{1}$$

Diese Bedingung nimmt, wie die Ausrechnung zeigt, die Gestalt an:

$$A + B \cos r + C \sin r = 0,$$

wo A, B, C von r unabhängig sind. Sie kann daher nur dann identisch erfüllt sein, wenn $A = B = C = 0$ d. h.

$$(2)\begin{cases} R^2\left(\sum \gamma_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial p}\sum \gamma_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial q} - \sum \gamma_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial q}\sum \gamma_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial p}\right) + \sum \beta_1 \frac{\partial x_0}{\partial q}\sum \alpha_1 \frac{\partial x_0}{\partial p} \\ \qquad - \sum \alpha_1 \frac{\partial x_0}{\partial q}\sum \beta_1 \frac{\partial x_0}{\partial p} = 0, \\ R\left(\sum \gamma_1 \frac{\partial x_0}{\partial q}\sum \gamma_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial p} - \sum \gamma_1 \frac{\partial x_0}{\partial p}\sum \gamma_1 \frac{\partial \beta_1}{\partial q}\right) + \frac{\partial R}{\partial q}\sum \beta_1 \frac{\partial x_0}{\partial p} \\ \qquad - \frac{\partial R}{\partial p}\sum \beta_1 \frac{\partial x_0}{\partial q} = 0, \\ R\left(\sum \gamma_1 \frac{\partial x_0}{\partial p}\sum \gamma_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial q} - \sum \gamma_1 \frac{\partial x_0}{\partial q}\sum \gamma_1 \frac{\partial \alpha_1}{\partial p}\right) + \frac{\partial R}{\partial p}\sum \alpha_1 \frac{\partial x_0}{\partial q} \\ \qquad - \frac{\partial R}{\partial q}\sum \alpha_1 \frac{\partial x_0}{\partial p} = 0. \end{cases}$$

Der ersten dieser Gleichungen kann man auch die Form geben:

$$\frac{\partial^2 c_{11}}{\partial r^2}\frac{\partial c_{21}}{\partial r} + \frac{\partial^2 c_{12}}{\partial r^2}\frac{\partial c_{22}}{\partial r} - \frac{\partial^2 c_{21}}{\partial r^2}\frac{\partial c_{11}}{\partial r} - \frac{\partial^2 c_{22}}{\partial r^2}\frac{\partial c_{12}}{\partial r} = 0. \tag{3}$$

Es muss nun gezeigt werden, dass die Determinante

$$J = \begin{vmatrix} E & F & G \\ \frac{\partial E}{\partial r} & \frac{\partial F}{\partial r} & \frac{\partial G}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 E}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} & \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} \end{vmatrix}$$

verschwindet. Man hat unter Berücksichtigung von (1):.

$$E = c_{11}^2 + c_{12}^2, \quad F = c_{11} c_{21} + c_{12} c_{22}, \quad G = c_{21}^2 + c_{22}^2,$$

$$\frac{\partial E}{\partial r} = 2 c_{11} \frac{\partial c_{11}}{\partial r} + 2 c_{12} \frac{\partial c_{12}}{\partial r}, \quad \frac{\partial F}{\partial r} = 2\left(c_{21} \frac{\partial c_{11}}{\partial r} + c_{22} \frac{\partial c_{12}}{\partial r}\right)$$

$$= 2\left(c_{11} \frac{\partial c_{21}}{\partial r} + c_{12} \frac{\partial c_{22}}{\partial r}\right),$$

$$\frac{\partial G}{\partial r} = 2\left(c_{21} \frac{\partial c_{21}}{\partial r} + c_{22} \frac{\partial c_{22}}{\partial r}\right).$$

In Folge dessen wird:

$$F \frac{\partial G}{\partial r} - G \frac{\partial F}{\partial r} = 2c\left(c_{22} \frac{\partial c_{21}}{\partial r} - c_{21} \frac{\partial c_{22}}{\partial r}\right),$$

$$G \frac{\partial E}{\partial r} - E \frac{\partial G}{\partial r} = 2c\left(c_{11} \frac{\partial c_{22}}{\partial r} + c_{21} \frac{\partial c_{12}}{\partial r} - c_{22} \frac{\partial c_{11}}{\partial r} - c_{12} \frac{\partial c_{21}}{\partial r}\right),$$

$$E \frac{\partial F}{\partial r} - F \frac{\partial E}{\partial r} = 2c\left(c_{12} \frac{\partial c_{11}}{\partial r} - c_{11} \frac{\partial c_{12}}{\partial r}\right),$$

wo $c = c_{12} c_{21} - c_{11} c_{22}$ gesetzt ist.

Ersetzt man in J die zweite Ableitung $\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}$ durch

$$2\left(c_{21} \frac{\partial^2 c_{11}}{\partial r^2} + c_{22} \frac{\partial^2 c_{12}}{\partial r^2} + \frac{\partial c_{12}}{\partial r} \frac{\partial c_{11}}{\partial r} + \frac{\partial c_{22}}{\partial r} \frac{\partial c_{12}}{\partial r}\right),$$

so heben sich in J alle Glieder fort, die nur erste Ableitungen der Grössen $c_{\alpha\beta}$ enthalten, und es wird:

$$J = 4c\left\{c\left(-\frac{\partial^2 c_{11}}{\partial r^2} \frac{\partial c_{21}}{\partial r} - \frac{\partial^2 c_{12}}{\partial r^2} \frac{\partial c_{22}}{\partial r} + \frac{\partial^2 c_{21}}{\partial r^2} \frac{\partial c_{11}}{\partial r} + \frac{\partial^2 c_{22}}{\partial r^2} \frac{\partial c_{12}}{\partial r}\right)\right.$$

$$\left. + \left(c_{21} \frac{\partial c_{11}}{\partial r} - c_{22} \frac{\partial c_{11}}{\partial r}\right)\left(c_{21} \frac{\partial^2 c_{11}}{\partial r^2} + c_{22} \frac{\partial^2 c_{12}}{\partial r^2} - c_{11} \frac{\partial^2 c_{21}}{\partial r^2} - c_{12} \frac{\partial^2 c_{22}}{\partial r^2}\right)\right\}.$$

Aber die rechte Seite dieser Gleichung verschwindet in Folge von (1) und (3).

Um einen zweiten Beweis des in Rede stehenden Satzes zu leisten, gehen wir aus von der Bemerkung, dass die erste Krümmung der Curven einer cyclischen Schar von r unabhängig ist und ihre zweite Krümmung verschwindet. Dies drückt sich in Folge der Gleichungen (2) und (3) § 8 so aus:

$$(4) \qquad \frac{\vartheta}{P_1} = -g_0\left(\frac{1}{P_2}\right), \quad \frac{\vartheta}{P_2} = g_0\left(\frac{1}{P_1}\right).$$

Man nehme nun in der zweiten Gleichung des Systems (9) § 7 für F die Grösse $\frac{1}{P_2}$, in der dritten für F die Grösse $\frac{1}{P_1}$ und betrachte ε als Null. Dann folgt unter Berücksichtigung von (4):

$$g_{10}\left(\frac{1}{P_2}\right) + \frac{1}{P_1} g_1(\vartheta) + \vartheta g_1\left(\frac{1}{P_1}\right) = \frac{1}{h_1} g_1\left(\frac{1}{P_2}\right) + \vartheta\left(g_2\left(\frac{1}{P_2}\right) + \frac{1}{P_1^2}\right),$$

$$g_{20}\left(\frac{1}{P_1}\right) - \frac{1}{P_2} g_2(\vartheta) - \vartheta g_2\left(\frac{1}{P_2}\right) = \frac{1}{h_2} g_2\left(\frac{1}{P_1}\right) - \vartheta\left(g_1\left(\frac{1}{P_1}\right) + \frac{1}{P_2^2}\right).$$

Subtrahirt man die zweite dieser Gleichungen von der ersten, so wird:

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} g_{10}\left(\frac{1}{P_2}\right) - g_{20}\left(\frac{1}{P_1}\right) + \frac{1}{P_1} g_1(\vartheta) + \frac{1}{P_2} g_2(\vartheta) - \frac{1}{h_1} g_1\left(\frac{1}{P_2}\right) + \frac{1}{h_2} g_2\left(\frac{1}{P_1}\right) \\ - \vartheta\left(\frac{1}{P_1^2} + \frac{1}{P_2^2}\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Zur Vereinfachung dieser Beziehung benutzen wir das System (11) § 7. Da erhält man aus der vierten und neunten Gleichung:

$$g_{10}\left(\frac{1}{P_2}\right) - g_{20}\left(\frac{1}{P_1}\right) = -\vartheta\left(\frac{1}{P_2 R_1} + \frac{1}{P_1 R_2}\right) - \frac{1}{P_1} g_0\left(\frac{1}{R_1}\right) + \frac{1}{P_2} g_0\left(\frac{1}{R_2}\right),$$

aus der siebenten und achten:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{P_1}\left(g_0\left(\frac{1}{R_1}\right) - g_1(\vartheta)\right) + \frac{1}{P_2}\left(g_0\left(\frac{1}{R_2}\right) + g_2(\vartheta)\right) = -\frac{1}{h_1 P_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{P_2}\right) \\ + \frac{1}{h_2 P_2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{P_1}\right) + \vartheta\left(\frac{1}{P_1^2} + \frac{1}{P_2^2} + \frac{1}{P_1 R_2} + \frac{1}{P_2 R_1}\right), \end{aligned}$$

aus der vierten und neunten:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{h_1} g_1\left(\frac{1}{P_2}\right) + \frac{1}{h_2} g_2\left(\frac{1}{P_1}\right) = \frac{1}{h_1 P_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{P_2}\right) + \frac{1}{h_2 P_2}\left(\frac{1}{P_1} - \frac{1}{R_2}\right) \\ + \vartheta\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right)^2. \end{aligned}$$

In Folge dessen ist die Beziehung (5) gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\vartheta\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right)^2 = 0,$$

d. h. aber: es verschwindet ϑ, wenn ε gleich Null ist.

Wir beweisen ferner den Satz: Besteht eine doppelt unendliche Schar von Kreisen mit dem constanten Radius $\frac{1}{c}$ aus den orthogonalen Trajectorien einer Flächenschar, so besitzen die Individuen der letzteren das constante Krümmungsmass $-c^2$.

Es gilt hier ausser der Voraussetzung $\varepsilon = \vartheta = 0$ noch die Annahme:

$$c^2 = \frac{1}{P_1^2} + \frac{1}{P_2^2},$$

sodass:

$$\frac{1}{P_1} g_0\left(\frac{1}{P_1}\right) + \frac{1}{P_2} g_0\left(\frac{1}{P_2}\right) = 0.$$

Aus der dritten und vierten Gleichung in (11) § 7 folgt dann:

$$g_0\left(\frac{1}{h_1}\right) = c^2 + \frac{1}{h_1^2},$$

und aus der sechsten und letzten Gleichung daselbst folgt:

$$g_0\left(\frac{1}{h_2}\right) = c^2 + \frac{1}{h_2^2}.$$

Ferner hat man nach (11) § 7:

$$g_2\left(\frac{1}{h_1}\right) = \frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right), \quad g_1\left(\frac{1}{h_2}\right) = \frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1}\right),$$

$$g_0\left(\frac{1}{R_1}\right) = \frac{1}{h_1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{P_2}\right), \quad g_0\left(\frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{h_2}\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{P_1}\right).$$

Die dritte Gleichung in (9) § 7 wird für $\mathfrak{F} = \frac{1}{h_1}$ zu:

$$g_{20}\left(\frac{1}{h_1}\right) - g_{02}\left(\frac{1}{h_1}\right) = \frac{1}{h_2} g_2\left(\frac{1}{h_1}\right) - \frac{1}{P_2} g_0\left(\frac{1}{h_1}\right).$$

Aber:

$$g_{20}\left(\frac{1}{h_1}\right) - g_{02}\left(\frac{1}{h_1}\right) = \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right)\left(\frac{1}{R_1 h_2} - \frac{1}{h_1 P_2}\right),$$

somit:

$$\frac{1}{h_1 h_2 P_2} = -\frac{c^2}{P_2}.$$

Bildet man die zweite Gleichung in (9) § 7 für $\mathfrak{F} = \frac{1}{h_2}$, so erkennt man entsprechend, dass:

$$\frac{1}{h_1 h_2 P_1} = -\frac{c^2}{P_1}.$$

Die beiden Grössen $\frac{1}{P_1}$ und $\frac{1}{P_2}$ können aber nicht gleichzeitig verschwinden, ohne dass die Kreise in gerade Linien ausarten. Wir erhalten daher gemäss der Behauptung:

$$\frac{1}{h_1 h_2} = -c^2.$$

Mit einer cyclischen Curvenschar ist zugleich ein Strahlensystem gegeben. Man erhält es, wenn man durch die Mittelpunkte der Kreise Senkrechte zu ihren Ebenen legt. Die Mittelpunkte bilden eine Fläche mit den Coordinaten:

$$x_0 = x + \frac{(P_2 \varkappa_1 + P_1 \varkappa_2) P_1 P_2}{P_1^2 + P_2^2}, \quad y_0 = y + \frac{(P_2 \lambda_1 + P_1 \lambda_2) P_1 P_2}{P_1^2 + P_2^2},$$

$$z_0 = z + \frac{(P_2 \mu_1 + P_1 \mu_2) P_1 P_2}{P_1^2 + P_2^2},$$

und die Normalen der Ebenen der Kreise besitzen die Richtungscosinus:

$$\xi' = \frac{P_2 \varkappa_2 - P_1 \varkappa_1}{\sqrt{P_1^2 + P_2^2}}, \quad \eta' = \frac{P_2 \lambda_2 - P_1 \lambda_1}{\sqrt{P_1^2 + P_2^2}}, \quad \zeta' = \frac{P_2 \mu_2 - P_1 \mu_1}{\sqrt{P_1^2 + P_2^2}}.$$

Wir werden hierauf im § 12 zurückkommen.

§ 10. Schar orthogonaler Trajectorien, bezogen auf die Krümmungslinien erster Art. Normalkrümmung. Geodätische Krümmung.

Man erhält eine Schar orthogonaler Trajectorien der Curven $p = \text{Const.}$, $q = \text{Const.}$ dadurch, dass man p, q, r durch solche Functionen einer Veränderlichen t und zweier Parameter a, b darstellt, welche der Differentialgleichung:

$$a_{13} \frac{\partial p}{\partial t} + a_{23} \frac{\partial q}{\partial t} + a_{33} \frac{\partial r}{\partial t} = 0$$

genügen. Längs einer derartigen Trajectorie hat man einerseits:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial t} dt = \left(x_p \frac{\partial p}{\partial t} + x_q \frac{\partial q}{\partial t}\right) dt,$$

andererseits:

$$dx = \varkappa_1 \mathfrak{S}_1 + \varkappa_2 \mathfrak{S}_2,$$

so dass:

$$\mathfrak{S}_1 : \mathfrak{S}_2 = \sum \varkappa_1 \frac{\partial x}{\partial t} : \sum \varkappa_2 \frac{\partial x}{\partial t}.$$

Setzen wir:

$$\frac{\sum \varkappa_1 \frac{\partial x}{\partial t}}{\sqrt{\sum \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2}} = \alpha_1, \quad \frac{\sum \varkappa_2 \frac{\partial x}{\partial t}}{\sqrt{\sum \left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2}} = \alpha_2,$$

so sind α_1 und α_2 die Cosinus der Winkel, welche die Tangente der durch den Punkt (p, q, r) gehenden Trajectorie mit den Tangenten der Krümmungslinien erster Art bildet.

Denkt man sich umgekehrt α_1 und α_2 als Functionen von p, q und r gegeben und sucht die entsprechende Schar orthogonaler Trajectorien zu bestimmen, so berücksichtige man, dass:

$$x_p \frac{\partial p}{\partial t} + x_q \frac{\partial q}{\partial t} = \lambda (\varkappa_1 \alpha_1 + \varkappa_2 \alpha_2),$$

wo λ einen Proportionalitätsfactor bedeutet. Hieraus folgt:

$$\sigma_1 \frac{\partial p}{\partial t} + \sigma_2 \frac{\partial q}{\partial t} = \alpha_1 \lambda, \quad \sigma_3 \frac{\partial p}{\partial t} + \sigma_4 \frac{\partial q}{\partial t} = \alpha_2 \lambda,$$

d. h.

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \lambda \frac{\alpha_1 \sigma_4 - \alpha_2 \sigma_2}{\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3}, \quad \frac{\partial q}{\partial t} = \lambda \frac{-\sigma_3 \alpha_1 + \sigma_1 \alpha_2}{\sigma_1 \sigma_4 - \sigma_2 \sigma_3}.$$

Man erhält also die endlichen Gleichungen der Trajectorienschar durch Integration des simultanen Systems:

$$dp:dq:dr = \alpha_1\sigma_4 - \alpha_2\sigma_2 : -\sigma_3\alpha_1 + \sigma_1\alpha_2 : \frac{a_{13}(\alpha_2\sigma_2 - \alpha_1\sigma_4) + a_{23}(\sigma_3\alpha_1 - \sigma_1\alpha_2)}{a_{33}}.$$

Mit einer Schar orthogonaler Trajectorien ist zugleich die Schar derjenigen orthogonalen Trajectorien gegeben, welche die ersteren senkrecht schneiden.

Setzen wir:

$$T_1 = \alpha_1 \mathfrak{S}_1 + \alpha_2 \mathfrak{S}_2, \qquad T_2 = -\alpha_2 \mathfrak{S}_1 + \alpha_1 \mathfrak{S}_2,$$

so wird die erste Schar durch die Differentialgleichung $T_2 = 0$, die zweite durch die Differentialgleichung $T_1 = 0$ festgelegt. Für eine beliebige Function $\mathfrak{F}$ von p, q, r bestehen jetzt die Beziehungen:

$$(d\mathfrak{F})_{T_1} = \alpha_1 g_1(\mathfrak{F}) + \alpha_2 g_2(\mathfrak{F}), \qquad (d\mathfrak{F})_{T_2} = -\alpha_2 g_1(\mathfrak{F}) + \alpha_1 g_2(\mathfrak{F}),$$

sodass im Besonderen:

$$(d\xi)_{T_1} = -\varkappa_1\left(\frac{\alpha_1}{h_1} + \varepsilon\alpha_2\right) + \varkappa_2\left(\varepsilon\alpha_1 - \frac{\alpha_2}{h_2}\right),$$

$$(d\xi)_{T_2} = \varkappa_1\left(\frac{\alpha_2}{h_1} - \varepsilon\alpha_1\right) - \varkappa_2\left(\varepsilon\alpha_2 + \frac{\alpha_1}{h_2}\right).$$

Für die Normalkrümmung der betrachteten Scharen erhalten wir:

$$\frac{1}{h_{T_1}} = -\sum (d\xi)_{T_1}(dx)_{T_1} = \frac{\alpha_1^2}{h_1} + \frac{\alpha_2^2}{h_2},$$

$$\frac{1}{h_{T_2}} = -\sum (d\xi)_{T_2}(dx)_{T_2} = \frac{\alpha_2^2}{h_1} + \frac{\alpha_1^2}{h_2},$$

$$\frac{1}{h_{T_1}} + \frac{1}{h_{T_2}} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}.$$

Diese Beziehungen sagen für Curvenscharen dasselbe aus, was in der Flächentheorie der Euler'sche Satz über den Krümmungsradius eines Normalschnitts, und der Satz über die Summe der Krümmungen zweier zu einander senkrechter Normalschnitte bedeutet.

Die Gleichung einer Schar von Asymptotenlinien wird:

$$\frac{\alpha_1^2}{h_1} + \frac{\alpha_2^2}{h_2} = 0.$$

Die Asymptotenlinien bilden daher im Allgemeinen zwei getrennte Scharen. Dieselben sind imaginär, falls $\frac{1}{h_1 h_2}$ positiv. Sie fallen in eine Schar zusammen, wenn $\frac{1}{h_1}$ oder $\frac{1}{h_2}$ verschwindet. Nehmen wir $\frac{1}{h_1}$ als verschwindend an, so wird nach der ersten Gleichung in (11) § 7:

$$g_1(\varepsilon) = \frac{1}{R_1 h_2} + \frac{2\varepsilon}{P_1}.$$

Aber R_1 ist der Halbmesser der ersten Krümmung der Asymptotenlinien, die hier mit der ersten Schar der Krümmungslinien erster Art zusammenfallen. Wir haben es also mit geraden Asymptotenlinien zu thun, falls:

$$g_1(\varepsilon) = \frac{2\varepsilon}{P_1}.$$

In einer Normalschar sind daher zusammenfallende Asymptotenlinien stets gerade.

Ist $\frac{1}{h_1 h_2}$ kleiner als Null, also $\frac{1}{h_1}$ positiv, $\frac{1}{h_2}$ negativ, so bilden die Asymptotenlinien zwei reelle Scharen. Die Richtungscosinus der Tangenten der einen sind:

$$\frac{\varkappa_1 \sqrt{h_1} + \varkappa_2 \sqrt{-h_2}}{\sqrt{h_1 - h_2}}, \text{ u. s. f.},$$

die der anderen:

$$\frac{\varkappa_1 \sqrt{h_1} - \varkappa_2 \sqrt{-h_2}}{\sqrt{h_1 - h_2}}, \text{ u. s. f.}$$

Hieraus geht hervor, dass die Krümmungslinien erster Art die von den Asymptotenlinien gebildeten Winkel halbiren. Diese Winkel sind rechte, wenn $h_1 + h_2 = 0$.

Für die geodätische Krümmung der betrachteten Scharen erhalten wir:

$$-\frac{1}{R_{T_1}} = \sum (dx)_{T_1} (dx)_{T_2 T_1} = -\alpha_1 (d\alpha_2)_{T_1} + \alpha_2 (d\alpha_1)_{T_1} + \sum \varkappa_1 (d\varkappa_2)_{T_1}.$$

Aber:

$$\alpha_1 (d\alpha_2)_{T_1} - \alpha_2 (d\alpha_1)_{T_1} = g_1(\alpha_2) - g_2(\alpha_1)$$

und:

$$\sum \varkappa_1 (d\varkappa_2)_{T_1} = -\frac{\alpha_1}{R_1} + \frac{\alpha_2}{R_2},$$

somit:

$$\frac{1}{R_{T_1}} = g_1(\alpha_2) - g_2(\alpha_1) + \frac{\alpha_1}{R_1} - \frac{\alpha_2}{R_2},$$

und entsprechend:

$$\frac{1}{R_{T_2}} = -g_1(\alpha_1) - g_2(\alpha_2) + \frac{\alpha_2}{R_1} + \frac{\alpha_1}{R_2}.$$

Die Gleichung:

$$g_2(\alpha_1) - g_1(\alpha_2) - \frac{\alpha_1}{R_1} + \frac{\alpha_2}{R_2} = 0$$

ist folglich die Differentialgleichung der geodätischen Linien der Curvenschar, während:

$$g_1(\alpha_1) + g_2(\alpha_2) - \frac{\alpha_2}{R_1} - \frac{\alpha_1}{R_2} = 0$$

die Differentialgleichung derjenigen orthogonalen Trajectorien ist, deren

senkrechte Durchdringungscurven, sofern sie gleichzeitig solche der gegebenen Curvenschar sind, aus geodätischen Linien dieser Schar bestehen.

Wir schliessen hieran einige Bemerkungen. Sollen die Curven $T_2 = 0$, $T_1 = 0$ gleichzeitig geodätische Linien sein, so hat man:

$$\frac{1}{R_1} = g_1\left(\operatorname{arctg}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right), \quad \frac{1}{R_2} = -g_2\left(\operatorname{arctg}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right),$$

und damit:

$$g_2\left(\frac{1}{R_1}\right) + g_1\left(\frac{1}{R_2}\right) = g_{12}\left(\operatorname{arctg}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) - g_{21}\left(\operatorname{arctg}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right).$$

Berücksichtigt man nun die erste Gleichung in (9) § 7, sowie die fünfte in (11) daselbst, so folgt:

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} = 2\varepsilon\left(g_0\left(\operatorname{arctg}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) - \vartheta\right).$$

Verschwindet ε, so muss die Curvenschar eine besondere sein, damit sie zwei Systeme zu einander senkrechter, orthogonaler Trajectorien besitze, die aus geodätischen Linien bestehen. Ist ε von Null verschieden, so kommt ihr die fragliche Eigenschaft nur dann zu, wenn die Differentialform:

$$\frac{\mathfrak{S}_1}{R_1} - \frac{\mathfrak{S}_2}{R_2} + \left(\frac{1}{2\varrho_1\varrho_2\varepsilon} + \vartheta\right) T_0$$

ein vollständiges Differential ist.

Nach § 8 (1) ist für die Schar der Hauptnormallinien:

$$\alpha_1 = \frac{\varrho}{P_1}, \quad \alpha_2 = \frac{\varrho}{P_2}$$

und nach § 8 (3) wird die zweite Krümmung der Curven $p = $ Const., $q = $ Const. durch die Gleichung bestimmt:

$$\frac{1}{\varrho'} = -\vartheta + g_0\left(\operatorname{arctg}\frac{P_2}{P_1}\right).$$

Wenn also sowohl die Haupt- wie die Binormallinien geodätische Linien sind, hat man:

$$\frac{1}{\varrho_1\varrho_2} - \frac{2\varepsilon}{\varrho'} = 0.$$

Betrachten wir nun die Krümmung der Curven $T_2 = 0$, $T_1 = 0$ in Bezug auf die Normalenfläche (ξ, η, ζ). Man erhält:

$$\frac{1}{l_{T_1}} = \sum (dx)_{T_2}(d\xi)_{T_1} = \alpha_1\alpha_2\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) + \varepsilon,$$

$$\frac{1}{l_{T_2}} = \sum (dx)_{T_1}(d\xi)_{T_2} = \alpha_1\alpha_2\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) - \varepsilon.$$

Die Curven $T_2 = 0$ sind Krümmungslinien zweiter Art, falls:

$$\alpha_1\alpha_2\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) + \varepsilon = 0$$

oder:

$$\alpha_1^2 = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\varepsilon^2}{\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right)^2}}.$$

Nach (16) § 4 folgt weiter:

$$\alpha_1^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}}{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}}.$$

Sind die Grössen $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_2}$ reell und verschieden, so bilden die Krümmungslinien zweiter Art zwei getrennte Scharen. Die Richtungscosinus der Tangenten der einen Schar sind:

$$\frac{\varkappa_1 \sqrt{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{\varrho_2}} + \varkappa_2 \sqrt{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{\varrho_1}}}{\sqrt{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}}} \text{ u. s. f.,}$$

die der anderen:

$$\frac{\varkappa_1 \sqrt{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{\varrho_1}} + \varkappa_2 \sqrt{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{\varrho_2}}}{\sqrt{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}}} \text{ u. s. f.}$$

Die hier in den Zählern auftretenden Wurzeln sind so zu bestimmen, dass:

$$\sqrt{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{\varrho_1}} \sqrt{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{\varrho_2}} + \varepsilon = 0.$$

Für den von den fraglichen Tangenten gebildeten Winkel φ ergiebt sich:

$$\cos\varphi = \frac{-2\varepsilon}{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}}, \quad \sin\varphi = \frac{\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}}{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}}.$$

Die Krümmungslinien zweiter Art besitzen dieselben Winkelhalbirungslinien, wie die Krümmungslinien erster Art und sind nur dann zu einander senkrecht, wenn ε verschwindet.

Die Krümmung der einen Schar von Asymptotenlinien in Bezug auf die Normalenfläche (ξ, η, ζ) wird:

$$\sqrt{-\frac{1}{h_1 h_2}} + \varepsilon$$

und die der anderen:

$$\varepsilon - \sqrt{-\frac{1}{h_1 h_2}}.$$

Da die fragliche Krümmung bei nicht ebenen Asymptotenlinien gleich der zweiten Krümmung dieser Linien ist, so folgt für $\varepsilon = 0$ der Enneper'sche Satz, nach welchem das Quadrat der zweiten Krümmung einer Asymptotenlinie auf einer Fläche gleich dem absoluten Werth des Gauss'schen Krümmungsmasses der Fläche ist. (Göttinger Nachrichten vom Jahre 1870. S. 499.)

Wir betrachten endlich noch die der Curvenschar $T_2 = 0$ adjungirte Curvenschar. Die Richtungscosinus ihrer Tangenten setzen wir in die Form:

$$\varkappa_1 \beta_1 + \varkappa_2 \beta_2, \quad \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2, \quad \mu_1 \beta_1 + \mu_2 \beta_2.$$

Zur Bestimmung von β_1, β_2 dient nach § 6 die Gleichung:

$$\sum (\varkappa_1 \beta_1 + \varkappa_2 \beta_2)(d\xi)_{T_1} = 0,$$

aus welcher folgt:

$$\frac{\beta_1}{\beta_2} = \frac{\varepsilon \alpha_1 - \frac{\alpha_2}{h_2}}{\frac{\alpha_1}{h_1} + \varepsilon \alpha_2}.$$

Man fasse nun einen regulären Punkt P der Curvenschar ins Auge. Dann wird durch die letzte Gleichung jeder durch P gehenden Tangente (α_1, α_2) eine durch P gehende Tangente (β_1, β_2) zugeordnet, welche ihre *adjungirte* heisse. Diese Zuordnung ist projectiv. Den sämmtlichen Tangenten (α_1, α_2) wird nur eine einzige Tangente (β_1, β_2) zugeordnet, falls

$$\varepsilon^2 + \frac{1}{h_1 h_2} = \frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = 0,$$

d. h. falls die zu Grunde gelegte Curvenschar eine besondere ist.

Die sich selbst entsprechenden Elemente der Projectivität werden durch die Gleichung bestimmt:

$$\frac{\alpha_1^2}{h_1} + \frac{\alpha_2^2}{h_2} = 0,$$

d. h. sie fallen mit den Tangenten der durch P gehenden Asymptotenlinien zusammen.

Die Projectivität ist eine Involution, wenn ε verschwindet. Hier ist der Begriff „adjungirte Tangente" gleichbedeutend mit dem Begriff „conjugirte Tangente" in der Flächentheorie.

Die der Tangente (β_1, β_2) adjungirte Tangente wollen wir die zweite adjungirte der Tangente (α_1, α_2) nennen, die der zweiten adjungirte sei die dritte adjungirte der Tangente (α_1, α_2) u. s. f. Die Bedingung dafür, dass die μ^{te} adjungirte mit der Tangente (α_1, α_2) zusammenfällt, ist:

$$\varrho_1 \varrho_2 \varepsilon^2 = \cos^2 \frac{\pi}{\mu}.$$

(Vergl. Serret, Handbuch der höheren Algebra. Zweite Auflage. 2. Bd. S. 303.)

Von der Betrachtung der in Rede stehenden Projectivität ist Herr A. Voss in seinen Arbeiten über Curvenscharen ausgegangen. (Mathem. Annalen Bd. 16. S. 556 und Bd. 23. S. 45.)

Wir schliessen diesen Paragraphen mit den leicht zu beweisenden Gleichungen:

$$\frac{1}{P_{T_1}} = \sum (d\xi)_{T_0} (dx)_{T_1} = \frac{\alpha_1}{P_1} + \frac{\alpha_2}{P_2},$$

$$\frac{1}{P_{T_2}} = \sum (d\xi)_{T_0} (dx)_{T_2} = \frac{\alpha_2}{P_1} - \frac{\alpha_1}{P_2},$$

$$\frac{1}{L_{T_1}} = \sum (dx)_{T_2} (dx)_{T_1 T_0} = - \alpha_2 g_0(\alpha_1) + \alpha_1 g_0(\alpha_2) + \vartheta,$$

$$\frac{1}{L_{T_2}} = - \frac{1}{L_{T_1}}.$$

§ 11. Curvenschar, die auf eine zweite bezogen ist. Ort der geodätischen Krümmungsmittelpunkte der Krümmungslinien eines Strahlensystems.

Wir nennen eine Curvenschar (C') auf eine Curvenschar (C) *bezogen*, wenn jedem Punkt (x, y, z) der letzteren ein Punkt (x', y', z') der ersteren, und jeder Tangente (ξ, η, ζ) der letzteren eine Tangente (ξ', η', ζ') der ersteren zugeordnet ist. Dies spricht sich in den Gleichungen aus:

$$x' = x + a_1 \varkappa_1 + a_2 \varkappa_2 + a_0 \xi,$$
$$y' = y + a_1 \lambda_1 + a_2 \lambda_2 + a_0 \eta,$$
$$z' = z + a_1 \mu_1 + a_2 \mu_2 + a_0 \zeta,$$
$$\xi' = \alpha_1 \varkappa_1 + \alpha_2 \varkappa_2 + \alpha_0 \xi, \quad \eta' = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2 + \alpha_0 \eta, \quad \zeta' = \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2 + \alpha_0 \zeta.$$

Hier sind a_1, a_2, a_0 beliebig zu wählende Functionen von p, q, r; $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_0$ ebensolche, die der Beziehung:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_0^2 = 1$$

genügen. Die für die Curvenschar (C') geltenden Grössen $\varkappa_1, \varkappa_2, R_1, R_2$ u. s. f. kennzeichnen wir durch einen oben angesetzten Strich. Die Aufgabe, diese Grössen mit Hülfe der entsprechenden, für die Schar (C) geltenden Grössen zu berechnen, kann auf Grund der in den §§ 6 und 7 gegebenen Entwicklungen vollständig gelöst werden. Sie bezeichnet in der Theorie der Curvenscharen das Analogon dessen, was Ribaucour

in der Flächentheorie „géométrie autour de la surface de référence“ genannt hat. (Journal de Mathématiques. T. VII. 1891.)

Wir wollen das im Allgemeinen recht umständliche Verfahren an zwei Beispielen erläutern und wählen als erstes den Fall, in dem die Schar (C') aus orthogonalen Trajectorien der Schar (C) besteht. Man hat hier $a_1 = a_2 = a_0 = \alpha_0 = 0$ zu setzen, so dass unter Beibehaltung der Bezeichnungen des vorigen Paragraphen:

$$\xi' = (dx)_{T_1}, \quad \eta' = (dy)_{T_1}, \quad \zeta' = (dz)_{T_1}.$$

Da hier:

$$\sum (dx)_{T_1} \varkappa_1' = \sum (dx)_{T_1} \varkappa_2' = 0,$$

so hat man bei Hinzunahme eines vorläufig noch unbekannten Winkels β:

$$\varkappa_1' = \xi \cos\beta + (dx)_{T_2} \sin\beta, \quad \varkappa_2' = -\xi \sin\beta + (dx)_{T_2} \cos\beta.$$

Für das Differential dx gelten die beiden Darstellungen:

$$(dx)_{T_1} T_1 + (dx)_{T_2} T_2 + \xi T_0 = \varkappa_1' \mathfrak{S}_1' + \varkappa_2' \mathfrak{S}_2' + (dx)_{T_1} T_0'.$$

Man erhält also:

$$\mathfrak{S}_1' = \sin\beta\, T_2 + \cos\beta\, T_0, \quad \mathfrak{S}_2' = \cos\beta\, T_2 - \sin\beta\, T_0, \quad T_0' = T_1.$$

Daher ergiebt sich für eine beliebige Function $\mathfrak{F}$:

$$(d\mathfrak{F})_{T_1} = g_0'(\mathfrak{F}), \quad (d\mathfrak{F})_{T_2} = g_1'(\mathfrak{F}) \sin\beta + g_2'(\mathfrak{F}) \cos\beta,$$
$$(d\mathfrak{F})_{T_0} = g_1'(\mathfrak{F}) \cos\beta - g_2'(\mathfrak{F}) \sin\beta.$$

Wenden wir dies auf $\xi' = (dx)_{T_1}$ an, so folgt:

$$\frac{(dx)_{T_2}}{R_{T_1}} + \frac{\xi}{h_{T_1}} = \frac{\varkappa_1'}{P_1'} + \frac{\varkappa_2'}{P_2'},$$

$$\frac{(dx)_{T_2}}{R_{T_2}} + \frac{\xi}{l_{T_2}} = \left(\frac{\varkappa_1'}{h_1'} - \varepsilon' \varkappa_2'\right) \sin\beta + \left(\varepsilon' \varkappa_1' + \frac{\varkappa_2'}{h_2'}\right) \cos\beta,$$

$$\frac{(dx)_{T_2}}{L_{T_1}} - \frac{\xi}{P_{T_1}} = \left(-\frac{\varkappa_1'}{h_1'} + \varepsilon' \varkappa_2'\right) \cos\beta + \left(\varepsilon' \varkappa_1' + \frac{\varkappa_2'}{h_2'}\right) \sin\beta,$$

also:

$$\frac{1}{P_1'} = \frac{\sin\beta}{R_{T_1}} + \frac{\cos\beta}{h_{T_1}}, \quad \frac{1}{P_2'} = \frac{\cos\beta}{R_{T_1}} - \frac{\sin\beta}{h_{T_1}},$$

$$\frac{\sin\beta}{h_1'} + \varepsilon' \cos\beta = \frac{\sin\beta}{R_{T_2}} + \frac{\cos\beta}{l_{T_2}}, \quad \frac{\cos\beta}{h_2'} - \varepsilon' \sin\beta = \frac{\cos\beta}{R_{T_2}} - \frac{\sin\beta}{l_{T_2}},$$

$$-\frac{\cos\beta}{h_1'} + \varepsilon' \sin\beta = \frac{\sin\beta}{L_{T_1}} - \frac{\cos\beta}{P_{T_1}}, \quad \frac{\sin\beta}{h_2'} + \varepsilon' \cos\beta = \frac{\cos\beta}{L_{T_1}} + \frac{\sin\beta}{P_{T_1}}.$$

Diese Gleichungen bestimmen die sechs Grössen P_1', P_2', h_1', h_2' ε' und β. Wir heben im Besonderen die Beziehungen hervor:

$$2\varepsilon' = \frac{1}{l_{T_2}} + \frac{1}{L_{T_1}}, \quad \sin 2\beta \left(\frac{1}{R_{T_2}} - \frac{1}{P_{T_1}}\right) + \cos 2\beta \left(\frac{1}{l_{T_2}} - \frac{1}{L_{T_1}}\right) = 0.$$

Die Curvenschar $T_2 = 0$ ist also eine Normalschar, wenn $\frac{1}{l_{T_2}} + \frac{1}{L_{T_1}} = 0$. Ihre Krümmungslinien erster Art sind die Curven $p = \text{Const.}$, $q = \text{Const.}$ und die Curven $T_1 = 0$, wenn:

$$\frac{1}{l_{T_2}} = \frac{1}{L_{T_1}}.$$

Betrachtet man an Stelle der Schar $T_2 = 0$ die Orthogonalschar $T_1 = 0$, so ist überall T_1 mit T_2, T_2 mit T_1 zu vertauschen, sodass:

$$2\varepsilon' = \frac{1}{l_{T_1}} + \frac{1}{L_{T_2}}.$$

Falls beide Scharen $T_1 = 0$ und $T_2 = 0$ Normalscharen sind, hat man in Folge von (4) § 6:

$$\frac{1}{l_{T_1}} + \frac{1}{l_{T_2}} = 0.$$

Dies zeigt nach (7) § 6, dass man es mit den Krümmungslinien erster Art zu thun hat. Umgekehrt sind die beiden Scharen der Krümmungslinien erster Art immer gleichzeitig Normalscharen oder nicht; denn für die eine Schar hat man:

$$2\varepsilon' = -\varepsilon + \vartheta,$$

für die andere:

$$2\varepsilon' = \varepsilon - \vartheta.$$

Bilden die Curven $T_2 = 0$ eine Normalschar, so überzeugt man sich leicht von dem Vorhandensein eines integrirenden Factors der Differentialform T_1. Nach (6) § 7 wird nämlich $2\varepsilon' = -c_{31}$ und nach (4) § 7 kommt das Verschwinden von c_{31} auf die Gleichung hinaus:

$$\alpha_{12}\frac{\partial \alpha_{11}}{\partial r} - \alpha_{11}\frac{\partial \alpha_{12}}{\partial r} = 0.$$

Diese stellt aber die Bedingung dar für das Vorhandensein eines integrirenden Factors der Differentialform:

$$T_1 = \alpha_{11}\,dp + \alpha_{12}\,dq.$$

Es bleiben noch die Grössen R_1', R_2' und ϑ' zu bestimmen übrig. Man hat:

$$\frac{1}{R_1'} = \sum \varkappa_2' g_1'(\varkappa_1'), \quad \frac{1}{R_2'} = \sum \varkappa_1' g_2(\varkappa_2'), \quad \vartheta' = \sum \varkappa_2' g_0(\varkappa_1').$$

Nun ist:

$$g_1'(\mathfrak{F}) = \cos\beta\,(d\mathfrak{F})_{T_0} + \sin\beta\,(d\mathfrak{F})_{T_2},$$
$$g_2'(\mathfrak{F}) = -\sin\beta\,(d\mathfrak{F})_{T_0} + \cos\beta\,(d\mathfrak{F})_{T_2},$$
$$g_0'(\mathfrak{F}) = (d\mathfrak{F})_{T_1},$$

daher ergiebt sich:

$$\frac{1}{R_1'} = \cos\beta\left(\frac{1}{P_{T_0}} + (d\beta)_{T_0}\right) - \sin\beta\left(\frac{1}{h_{T_2}} - (d\beta)_{T_2}\right),$$

$$\frac{1}{R_2'} = \sin\beta\left(\frac{1}{P_{T_2}} + (d\beta)_{T_0}\right) + \cos\beta\left(\frac{1}{h_{T_2}} - (d\beta)_{T_2}\right),$$

$$\vartheta' = \frac{1}{l_{T_1}} + (d\beta)_{T_1}.$$

In Betreff der obigen Bedingung:

$$\alpha_{12}\, g_0(\alpha_{11}) - \alpha_{11}\, g_0(\alpha_{12}) = 0$$

sei noch Folgendes bemerkt. Da:

$$T_1 = \alpha_1 \mathfrak{S}_1 + \alpha_2 \mathfrak{S}_2,$$

so wird:

$$\alpha_{11} = \alpha_1 \sigma_1 + \alpha_2 \sigma_3, \quad \alpha_{12} = \alpha_1 \sigma_2 + \alpha_2 \sigma_4,$$

und die fragliche Bedingung geht in Folge der Gleichungen (8) § 7 über in:

$$g_0\left(\operatorname{arctg}\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) + \varepsilon - \vartheta - \alpha_1\alpha_2\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) = 0.$$

Man nehme nun zunächst an, dass die Curvenschar aus den Normalen einer Parallelflächenschar besteht. Dann verschwinden ε, $\frac{1}{P_1}$ und $\frac{1}{P_2}$, aber auch ϑ, da eine Parallelflächenschar stets einem dreifach orthogonalen Flächensystem angehört, was übrigens auch aus der letzten Gleichung in (11) § 7 direct hervorgeht.

Wird ferner:

$$\alpha_1 = \frac{1}{R_1\sqrt{\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}}}, \quad \alpha_2 = \frac{-1}{R_2\sqrt{\frac{1}{R_1^2} + \frac{1}{R_2^2}}}$$

gesetzt, so sind die Tangenten der Curven $T_2 = 0$ parallel den Verbindungslinien der geodätischen Krümmungsmittelpunkte der Krümmungslinien.

Die siebente und achte Gleichung in (11) § 7 besitzen hier die Gestalt:

$$g_0\left(\frac{1}{R_1}\right) = \frac{1}{h_1 R_1}, \quad g_0\left(\frac{1}{R_2}\right) = \frac{1}{R_2 h_2}$$

und die Grösse ε' verschwindet. Wir erhalten folglich den Satz: *Legt man durch jeden Punkt einer Fläche eine Gerade, welche der Verbindungslinie der zum Punkt gehörenden geodätischen Krümmungsmittelpunkte der Krümmungslinien parallel ist, und führt man dieselbe Construction an allen Punkten der zur betrachteten Fläche parallelen Flächen aus, so bilden die in Rede stehenden Geraden die Tangenten einer Normalschar von Curven.*

Als zweites Beispiel betrachten wir die Krümmungsmittelpunktsflächen einer Flächenschar. Wir haben dann von vornherein ε gleich Null zu nehmen, zudem wird für eine Schar der Centraflächen:

$$x' = x + h_1 \xi, \quad y' = y + h_1 \eta, \quad z' = z + h_1 \zeta,$$
$$\xi' = \varkappa_1, \quad \eta' = \lambda_1, \quad \zeta' = \mu_1.$$

Man erhält für dx' die beiden Ausdrücke:

$$\xi g_1(h_1) \mathfrak{S}_1 + \left(\xi g_2'(h_1) + \left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right) \varkappa_2\right) \mathfrak{S}_2$$
$$+ \left(\xi (1 + g_0(h_1)) + \frac{h_1 \varkappa_1}{P_1} + \frac{h_1 \varkappa_2}{P_2}\right) T_0 = \varkappa_1' \mathfrak{S}_1' + \varkappa_2' \mathfrak{S}_2' + \varkappa_1 T_0'.$$

Es sei nun:

$$\varkappa_1' = \xi \cos\psi + \varkappa_2 \sin\psi, \quad \varkappa_2' = \xi \sin\psi - \varkappa_2 \cos\psi.$$

Dann folgt:

$$\frac{h_1}{P_1} T_0 = T_0',$$
$$\left(1 - \frac{h_1}{h_2}\right) \mathfrak{S}_2 + \frac{h_1}{P_2} T_0 = \sin\psi \mathfrak{S}_1' - \cos\psi \mathfrak{S}_2',$$
$$g_1(h_1) \mathfrak{S}_1 + g_2(h_1) \mathfrak{S}_2 + (1 + g_0(h_1)) T_0 = \cos\psi \mathfrak{S}_1' + \sin\psi \mathfrak{S}_2'.$$

Die erste dieser Gleichungen zeigt, dass die betrachtete Curvenschar eine Normalschar ist; denn, wenn μ ein integrirender Factor von T_0, so ist $\frac{\mu P_1}{h_1}$ ein solcher von T_0'. Falls $\frac{1}{P_1}$ und $\frac{1}{P_2}$ verschwinden, wird gemäss der dritten Gleichung in (11) § 7

$$1 + g_0(h_1) = 0$$

und damit:

$$g_0(x') = 0, \quad g_0(y') = 0, \quad g_0(z') = 0.$$

Dies heisst in Worte übertragen, dass zu einer Schar von Parallelflächen nur eine einzige Krümmungsmittelpunktsfläche gehört.

Unter Berücksichtigung der ersten und dritten Gleichung des Systems (11) § 7 findet man:

$$T_0 = \frac{P_1}{h_1} T_0',$$
$$\mathfrak{S}_2 = \frac{h_2}{h_2 - h_1} \left\{ \sin\psi \mathfrak{S}_1' - \cos\psi \mathfrak{S}_2' - \frac{P_1}{P_2} T_0' \right\},$$
$$\mathfrak{S}_1 = \frac{1}{g_1(h_1)} \left\{ \left(\cos\psi + \frac{h_1}{R_1} \sin\psi\right) \mathfrak{S}_1' + \left(\sin\psi - \frac{h_1}{R_1} \cos\psi\right) \mathfrak{S}_2' \right.$$
$$\left. + h_1 P_1 \left(\frac{1}{P_1^2} - g_1\left(\frac{1}{P_1}\right)\right) T_0' \right\},$$

und daraus folgt für eine beliebige Function $\mathfrak{F}$ von p, q, r:

$$g_1'(\mathfrak{F}) = \frac{g_1(\mathfrak{F})}{g_1(h_1)} \left(\cos\psi + \frac{h_1}{R_1} \sin\psi\right) + \frac{g_2(\mathfrak{F}) h_2}{h_2 - h_1} \sin\psi,$$

$$g_2'(\mathfrak{F}) = \frac{g_1(\mathfrak{F})}{g_1(h_1)}\left(\sin\psi - \frac{h_1}{R_1}\cos\psi\right) - \frac{g_2(\mathfrak{F})h_2}{h_2 - h_1}\cos\psi,$$

$$g_0'(\mathfrak{F}) = \frac{g_1(\mathfrak{F})h_1 P_1}{g_1(h_1)}\left(\frac{1}{P_1^2} - g_1\left(\frac{1}{P_1}\right)\right) - \frac{g_2(\mathfrak{F})h_2 P_1}{(h_2 - h_1)P_2} + \frac{g_0(\mathfrak{F})P_1}{h_1}.$$

Mit Hülfe dieser Formeln lassen sich die für die betrachtete Curvenschar in Frage kommenden Grössen leicht berechnen.

Der Winkel ψ wird gegeben durch das Verschwinden von ε' oder von $\Sigma \varkappa_2' g_1'(\varkappa_1)$, d. h. durch die Gleichung:

$$\frac{h_1}{g_1(h_1)}\cdot\left(\frac{\sin\psi}{h_1} - \frac{\cos\psi}{R_1}\right)\left(\frac{\sin\psi}{R_1} + \frac{\cos\psi}{h_1}\right) + \frac{h_2\sin\psi\cos\psi}{R_2(h_2 - h_1)} = 0.$$

Weiter folgt:

$$\frac{1}{h_1'} = \frac{h_2\sin^2\psi}{R_2(h_2 - h_1)} - \frac{h_1}{g_1(h_1)}\left(\frac{\sin\psi}{R_1} + \frac{\cos\psi}{h_1}\right)^2,$$

$$\frac{1}{h_2'} = \frac{h_2\cos^2\psi}{R_2(h_2 - h_1)} - \frac{h_1}{g_1(h_1)}\left(\frac{\cos\psi}{R_1} - \frac{\sin\psi}{h_1}\right)^2,$$

$$\frac{1}{R_1'} = \frac{\sin\psi}{h_2 - h_1} - g_1'(\psi),$$

$$\frac{1}{R_2'} = \frac{\cos\psi}{h_2 - h_1} + g_2'(\psi),$$

$$\frac{1}{P_1'} = \frac{h_1 P_1}{g_1(h_1)}\left(\frac{1}{P_1^2} - g_1\left(\frac{1}{P_1}\right)\right)\left(\frac{\sin\psi}{R_1} + \frac{\cos\psi}{h_1}\right) + \frac{\sin\psi\cdot h_2 P_1}{R_2(h_2 - h_1)P_2} + \left(\vartheta\sin\psi - \frac{\cos\psi}{P_1}\right)\frac{P_1}{h_1},$$

$$\frac{1}{P_2'} = \frac{h_1 P_1}{g_1(h_1)}\left(\frac{1}{P_1^2} - g_1\left(\frac{1}{P_1}\right)\right)\left(\frac{\sin\psi}{h_1} - \frac{\cos\psi}{R_1}\right) - \frac{\cos\psi\cdot h_2 P_1}{R_2 P_2(h_2 - h_1)} - \left(\frac{\sin\psi}{P_1} + \vartheta\cos\psi\right)\frac{P_1}{h_1},$$

$$\vartheta' = \frac{h_2 P_1}{h_1 P_2(h_1 - h_2)} - g_0'(\psi).$$

In derselben Weise lässt sich die zweite Schar der Krümmungsmittelpunktsflächen behandeln, welche durch die Gleichungen:

$$x'' = x + h_2\xi,\quad y'' = y + h_2\eta,\quad z'' = z + h_2\zeta,$$
$$\xi'' = \varkappa_2,\quad \lambda'' = \lambda_2,\quad \zeta'' = \mu_2$$

dargestellt wird.

Entsprechend kann man die Curvenscharen untersuchen, welche von den geodätischen Krümmungsmittelpunkten der Krümmungslinien einer gegebenen Curvenschar bestimmt werden. Bei den Strahlensystemen sind diese Scharen entweder ebenfalls Strahlensysteme, oder sie bestehen aus Hyperbeln. Der Nachweis dieser Behauptung möge den Schluss dieses Paragraphen bilden.

Wir sahen im § 8, dass bei einem Strahlensystem die Grössen $\frac{1}{P_1}$ und $\frac{1}{P_2}$ verschwinden. Folglich ist nach (10) § 7:

$$d\xi = \varkappa_1\left(-\frac{\mathfrak{S}_1}{h_1} - \varepsilon\mathfrak{S}_2\right) + \varkappa_2\left(\varepsilon\mathfrak{S}_1 - \frac{\mathfrak{S}_2}{h_2}\right).$$

Nehmen wir:

$$H_1 = -\frac{\mathfrak{S}_1}{h_1} - \varepsilon\mathfrak{S}_2, \quad H_2 = \varepsilon\mathfrak{S}_1 - \frac{\mathfrak{S}_2}{h_2},$$

so sind H_1 und H_2 lineare Differentialformen von dp und dq, deren Coefficienten nur von p und q abhängen. Für eine beliebige Function $\mathfrak{F}$ ergiebt sich:

$$g_1(\mathfrak{F}) = -\frac{1}{h_1}(d\mathfrak{F})_{H_1} + \varepsilon(d\mathfrak{F})_{H_2}, \quad g_2(\mathfrak{F}) = -\varepsilon(d\mathfrak{F})_{H_1} - \frac{1}{h_2}(d\mathfrak{F})_{H_2}.$$

Wir erhalten daher:

$$\frac{1}{R_1} = \sum \varkappa_2 g_1(\varkappa_1) = -\frac{1}{h_1}\sum \varkappa_2(d\varkappa_1)_{H_1} + \varepsilon\sum \varkappa_2(d\varkappa_1)_{H_2},$$

$$\frac{1}{R_2} = \sum \varkappa_1 g_2(\varkappa_2) = -\varepsilon\sum \varkappa_1(d\varkappa_2)_{H_1} - \frac{1}{h_2}\sum \varkappa_1(d\varkappa_2)_{H_2}.$$

Die Differentialgleichungen:

$$H_1 = 0, \quad H_2 = 0$$

bestimmen auf der Einheitskugel (ξ, η, ζ) zwei Curvenscharen, deren Tangenten den Tangenten der Krümmungslinien erster Art des Strahlensystems parallel sind. Bezeichnen wir ihre geodätischen Krümmungen mit $\frac{1}{K_1}$ und $\frac{1}{K_2}$, so wird nach § 2:

$$\frac{1}{K_1} = -\sum \varkappa_1(d\varkappa_2)_{H_1}, \quad \frac{1}{K_2} = -\sum \varkappa_2(d\varkappa_1)_{H_2}.$$

Folglich erhalten wir:

$$\frac{1}{R_1} = -\frac{1}{h_1 K_1} - \frac{\varepsilon}{K_2}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\varepsilon}{K_1} - \frac{1}{h_2 K_2}.$$

Um den geometrischen Ort der geodätischen Krümmungsmittelpunkte der Krümmungslinien erster Art längs eines Strahls zu finden, ist die Art der Abhängigkeit der Grössen R_1 und R_2 von r darzuthun, falls das Strahlensystem durch die Gleichungen:

$$x = x_0 + r\xi, \quad y = y_0 + r\eta, \quad z = z_0 + r\zeta$$

dargestellt wird, wo x_0, y_0, z_0 Functionen von p und q allein sind.

In Betreff der Grössen h_1 und h_2 fanden wir (12) und (14) § 4:

$$\frac{1}{h_1} = \frac{\mathfrak{r}_2}{\varrho_1\varrho_2}, \quad \frac{1}{h_2} = \frac{\mathfrak{r}_1}{\varrho_1\varrho_2}.$$

Die Werthe von $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, ϱ_1, ϱ_2 für $r = 0$ sollen mit $\mathfrak{r}_{10}$, $\mathfrak{r}_{20}$, ϱ_{10}, ϱ_{20} bezeichnet werden. Dann ist:

$$\mathfrak{r}_1 = \mathfrak{r}_{10} - r, \quad \mathfrak{r}_2 = \mathfrak{r}_{20} - r,$$

$$\varrho_1 = \varrho_{10} - r, \quad \varrho_2 = \varrho_{20} - r,$$

$$\frac{1}{h_1} = \frac{\mathfrak{r}_{20} - r}{(\varrho_{10} - r)(\varrho_{20} - r)}, \quad \frac{1}{h_2} = \frac{\mathfrak{r}_{10} - r}{(\varrho_{10} - r)(\varrho_{20} - r)}.$$

Die Grösse ε wurde S. 30, Z. 1 durch die Gleichung festgelegt:

$$\varepsilon^2 = \frac{(f - f')^2}{4(EG - F^2)}.$$

Aus den S. 34, Z. 21 aufgestellten Formeln folgt, da hier r dasselbe bedeutet, wie l a. a. O., dass:

$$f - f' = f_0 - f_0',$$

$$EG - F^2 = (H\Psi - \Phi^2)(\varrho_{10} - r)^2(\varrho_{20} - r)^2.$$

Setzen wir also:

$$\varepsilon' = \frac{f_0 - f_0'}{2\sqrt{H\Psi - \Phi^2}},$$

so ist ε' von r unabhängig und es folgt:

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon'}{(\varrho_{10} - r)(\varrho_{20} - r)}.$$

Man hat im betrachteten Fall:

$$a_{33} = 1, \quad g_0(\mathfrak{F}) = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial r},$$

und die aufgestellten Ausdrücke für $\frac{1}{h_1}$, $\frac{1}{h_2}$ und ε genügen der dritten, sechsten und letzten Differentialgleichung des Systems (11) § 7.

Wir erhalten jetzt:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{\frac{r - \mathfrak{r}_{20}}{K_1} - \frac{\varepsilon'}{K_2}}{(\varrho_{10} - r)(\varrho_{20} - r)}, \quad \frac{1}{R_2} = \frac{\frac{\varepsilon'}{K_1} + \frac{r - \mathfrak{r}_{10}}{K_2}}{(\varrho_{10} - r)(\varrho_{20} - r)}.$$

Längs ein und desselben Strahls liegen daher die Mittelpunkte der geodätischen Krümmungen der Krümmungslinien erster Art im Allgemeinen auf zwei Hyperbeln. Die Gleichungen derselben besitzen die gemeinsame Discriminante:

$$\frac{\varepsilon'}{4}\left(\frac{\mathfrak{r}_{10} - \mathfrak{r}_{20}}{K_1 K_2} - \varepsilon'\left(\frac{1}{K_1^2} + \frac{1}{K_2^2}\right)\right).$$

Die Hyperbeln werden somit Gerade, wenn $\varepsilon' = 0$, d. h. wenn das Strahlensystem ein Normalensystem ist, oder wenn:

$$1 = \frac{\varepsilon'}{\mathfrak{r}_{10} - \mathfrak{r}_{20}}\left(\frac{K_1}{K_2} + \frac{K_2}{K_1}\right).$$

Diese Beziehung lässt sich leicht in eine geometrisch durchsichtige Form setzen. Wir fanden im § 10 für den Winkel φ der beiden Brennebenen die Gleichung:

$$\cos\varphi = \frac{-2\varepsilon}{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}}.$$

Unter Benutzung der oben angegebenen Ausdrücke für $\frac{1}{h_1}$, $\frac{1}{h_2}$ und ε gewinnt sie die Gestalt:

$$\cos\varphi = \frac{2\varepsilon'}{\mathfrak{r}_{10} - \mathfrak{r}_{20}}.$$

Nimmt man:

$$\frac{K_1}{K_2} = \operatorname{tg}\psi,$$

so bedeutet ψ den Winkel, welchen die Verbindungslinie der geodätischen Krümmungsmittelpunkte der sphärischen Curven $H_1 = 0$ und $H_2 = 0$ mit der Kugeltangente $(\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1)$ bildet, und die fragliche Beziehung wird gleichbedeutend mit der folgenden:

$$\cos\varphi = \sin 2\psi.$$

Um den Ort der geodätischen Krümmungsmittelpunkte der Krümmungslinien zweiter Art längs eines Strahls zu finden, bemerke man, dass die Gleichung (11) § 5 hier in der Form:

$$\delta x_0 = -\varrho_{10}\varkappa_3 S_1 - \varrho_{20}\varkappa_4 S_2$$

geschrieben werden muss, sodass:

$$\delta x = \delta x_0 + r\,d\xi = (r - \varrho_{10})\,\varkappa_3 S_1 + (r - \varrho_{20})\,\varkappa_4 S_2.$$

Nimmt man daher:

$$T_1 = (r - \varrho_{10}) S_1, \quad T_2 = (r - \varrho_{20}) S_2,$$

so werden:

$$(d\mathfrak{F})_{T_1} = \frac{(d\mathfrak{F})_{S_1}}{r - \varrho_{10}}, \quad (d\mathfrak{F})_{T_2} = \frac{(d\mathfrak{F})_{S_2}}{r - \varrho_{20}}$$

die Ableitungen der Function $\mathfrak{F}$ nach den Bogenlängen der Krümmungslinien zweiter Art.

Wir bezeichnen die geodätischen Krümmungen der Curven $T_2 = 0$, $T_1 = 0$, $T_2' = 0$, $T_1' = 0$ der Reihe nach mit $\frac{1}{R_3}$, $\frac{1}{R_4}$, $\frac{1}{R_3'}$, $\frac{1}{R_4'}$; ebenso die der sphärischen Curven $S_2 = 0$, $S_1 = 0$, $S_2' = 0$, $S_1' = 0$ mit $\frac{1}{K_3}$, $\frac{1}{K_4}$, $\frac{1}{K_3'}$, $\frac{1}{K_4'}$. Die im § 10 gefundene Gleichung:

$$\sin\varphi = \frac{\frac{1}{\varrho_1} - \frac{1}{\varrho_2}}{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}}$$

liefert in Verbindung mit der obigen für $\cos\varphi$ geltenden:

$$\cotg\varphi = -\frac{2\varepsilon}{\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}} = \frac{2\varepsilon'}{\varrho_{10}-\varrho_{20}},$$

und für die Ausdrücke A und B im § 5 ergiebt sich:

$$A = \frac{1}{K_3'} - \frac{2\varepsilon'}{(\varrho_{10}-\varrho_{20})K_3}, \quad B = \frac{1}{K_4'} - \frac{2\varepsilon'}{(\varrho_{10}-\varrho_{20})K_4}.$$

Man erhält jetzt:

$$\frac{1}{R_3} = \sum \varkappa_3'(d\varkappa_3)_{T_1} = \frac{1}{(r-\varrho_{10})K_3},$$

$$\frac{1}{R_4} = \sum \varkappa_4'(d\varkappa_4)_{T_2} = \frac{1}{(r-\varrho_{20})K_4}.$$

Der Ort der geodätischen Krümmungsmittelpunkte der Krümmungslinien zweiter Art längs eines Strahls wird daher von zwei Geraden gebildet, welche durch die Brennpunkte hindurchgehen.

Ferner entsteht:

$$\frac{1}{R_3'} = -\sum \varkappa_3'(d\varkappa_3)_{T_1'} = \frac{\cos\varphi\,\Sigma\varkappa_3'(d\varkappa_3)_{T_1} - \Sigma\varkappa_3'(d\varkappa_3)_{T_2}}{\sin\varphi} = \frac{\cotg\varphi}{(r-\varrho_{10})K_3} + \frac{A}{r-\varrho_{20}},$$

$$\frac{1}{R_4'} = -\sum \varkappa_4'(d\varkappa_4)_{T_2'} = \frac{-\Sigma\varkappa_4'(d\varkappa_4)_{T_1} + \cos\varphi\,\Sigma\varkappa_4'(d\varkappa_4)_{T_2}}{\sin\varphi} = \frac{B}{r-\varrho_{10}} + \frac{\cotg\varphi}{(r-\varrho_{20})K_4}.$$

Es besteht daher längs eines Strahls der Ort der geodätischen Krümmungsmittelpunkte derjenigen orthogonalen Trajectorien des Strahlensystems, die zugleich senkrechte Durchdringungscurven der Krümmungslinien zweiter Art sind, aus zwei Hyperbeln. Die erste derselben, welche den Curven $T_2' = 0$ entspricht, artet für $A = 0$, die zweite für $B = 0$ in eine Gerade aus.

Giebt man den letzten Gleichungen die Form:

$$\frac{A}{r-\varrho_{20}} = \frac{1}{R_3'} - \frac{\cotg\varphi}{R_3}, \quad \frac{B}{r-\varrho_{10}} = \frac{1}{R_4'} - \frac{\cotg\varphi}{R_4},$$

so zeigen sich für $A = B = 0$ die Krümmungslinien zweiter Art wie ihre sphärischen Bilder (§ 5) im Besitze der Eigenschaft, dass die Tangenten der Curven $T_2 = 0$ oder $T_1 = 0$ senkrecht sind zu den Verbindungslinien der geodätischen Krümmungsmittelpunkte der Curven $T_1 = 0$ und $T_1' = 0$ oder $T_2 = 0$ und $T_2' = 0$.

§ 12. Transformationen in Bezug auf eine Curvenschar.

Sowie wir im vorigen Paragraphen eine Curvenschar auf eine zweite bezogen haben, kann man auch eine einzelne Function $\mathfrak{F}$ von p, q, r oder x, y, z, und ein System solcher Functionen auf eine

Curvenschar beziehen. Es entsteht dann die Aufgabe, die Ableitungen von $\mathfrak{F}$ nach p, q, r oder x, y, z durch die invariablen Operationen $g_1(\mathfrak{F}), g_2(\mathfrak{F}), g_0(\mathfrak{F})$ auszudrücken.

Die erste dieser Transformationen erhält man auf folgende Weise. Es ist:

$$d\mathfrak{F} = g_1(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_1 + g_2(\mathfrak{F})\mathfrak{S}_2 + g_0(\mathfrak{F})T_0.$$

Da nach § 6:

$$T_0 = \frac{1}{\sqrt{a_{33}}}(a_{13}\,dp + a_{23}\,dq + a_{33}\,dr),$$

und nach (7) § 7:

$$\mathfrak{S}_1 = \sigma_1\,dp + \sigma_2\,dq, \quad \mathfrak{S}_2 = \sigma_3\,dp + \sigma_4\,dq,$$

so entsteht:

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial p} = \sigma_1 g_1(\mathfrak{F}) + \sigma_3 g_2(\mathfrak{F}) + \dfrac{a_{13}}{\sqrt{a_{33}}}\,g_0(\mathfrak{F}), \\ \dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial q} = \sigma_2 g_1(\mathfrak{F}) + \sigma_4 g_2(\mathfrak{F}) + \dfrac{a_{23}}{\sqrt{a_{33}}}\,g_0(\mathfrak{F}), \\ \dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial r} = \sqrt{a_{33}}\,g_0(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Um von dieser Transformation eine Anwendung zu machen, betrachten wir die am Schluss des § 9 aus einer cyclischen Curvenschar hergeleitete Fläche (x_0, y_0, z_0) unter der Voraussetzung, dass die Kreisschar eine Normalschar sei, und die Radien der Kreise den constanten Werth $\frac{1}{c}$ besitzen*). Man hat dann:

$$x_0 = x + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\varkappa_1}{P_1} + \frac{\varkappa_2}{P_2}\right), \quad y_0 = y + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\lambda_1}{P_1} + \frac{\lambda_2}{P_2}\right),$$
$$z_0 = z + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\mu_1}{P_1} + \frac{\mu_2}{P_2}\right).$$

Wir bestimmen zunächst die Richtungscosinus der Normalen unserer Fläche. Da:

$$g_0(x_0) = g_0(y_0) = g_0(z_0) = 0,$$

ist:

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial y_0}{\partial p} & \dfrac{\partial y_0}{\partial q} \\ \dfrac{\partial z_0}{\partial p} & \dfrac{\partial z_0}{\partial q} \end{vmatrix} = \sigma \begin{vmatrix} g_1(y_0) & g_2(y_0) \\ g_1(z_0) & g_2(z_0) \end{vmatrix}.$$

Wir fanden im § 9:

$$g_0\left(\frac{1}{h_1}\right) = c^2 + \frac{1}{h_1}, \quad g_0\left(\frac{1}{h_2}\right) = c^2 + \frac{1}{h_2}.$$

*) Vergl. Bianchi, Lezioni di Geometria differenziale, pag. 322, No. 186.

In Folge dessen erhält man aus der dritten, vierten, neunten und sechsten Gleichung des Systems (11) § 7:

$$g_1\left(\frac{1}{P_1}\right) = -\frac{1}{P_2}\left(\frac{1}{P_2} - \frac{1}{R_1}\right), \quad g_1\left(\frac{1}{P_2}\right) = \frac{1}{P_1}\left(\frac{1}{P_2} - \frac{1}{R_1}\right),$$

$$g_2\left(\frac{1}{P_1}\right) = \frac{1}{P_2}\left(\frac{1}{P_1} - \frac{1}{R_2}\right), \quad g_2\left(\frac{1}{P_2}\right) = -\frac{1}{P_1}\left(\frac{1}{P_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Daher:

$$g_1(x_0) = \frac{1}{c^2 P_1}\left(\frac{\varkappa_1}{P_1} + \frac{\varkappa_2}{P_2} + \frac{\xi}{h_1}\right), \quad g_2(x_0) = \frac{1}{c^2 P_2}\left(\frac{\varkappa_1}{P_1} + \frac{\varkappa_2}{P_2} + \frac{\xi}{h_2}\right),$$

und:

$$\begin{vmatrix} g_1(y_0) & g_2(y_0) \\ g_1(z_0) & g_2(z_0) \end{vmatrix} = \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right)\left(\frac{\varkappa_2}{P_1} - \frac{\varkappa_1}{P_2}\right).$$

Die Normale der Fläche im Punkte (x_0, y_0, z_0) ist daher zugleich senkrecht zur Ebene des Kreises, dessen Mittelpunkt die Coordinaten x_0, y_0, z_0 besitzt. Ihre Richtungscosinus fallen also mit ξ', η', ζ' zusammen (§ 9). In Betreff der letzteren hat man:

$$g_1(\xi') = -\frac{1}{c P_2}\left(\frac{\varkappa_1}{P_1} + \frac{\varkappa_2}{P_2} + \frac{\xi}{h_1}\right), \quad g_2(\xi') = \frac{1}{c P_1}\left(\frac{\varkappa_1}{P_1} + \frac{\varkappa_2}{P_2} + \frac{\xi}{h_2}\right).$$

Aus den Proportionalitäten:

$$g_1(x_0) : g_1(y_0) : g_1(z_0) = g_1(\xi') : g_1(\eta') : g_1(\zeta'),$$
$$g_2(x_0) : g_2(y_0) : g_2(z_0) = g_2(\xi') : g_2(\eta') : g_2(\zeta')$$

folgt, dass die Operationen $g_1(\ )$ und $g_2(\ )$ Ableitungen in den Richtungen der Krümmungslinien der Fläche (x_0, y_0, z_0) liefern. Definirt man also die beiden Operationen $g_1'(\mathfrak{F})$ und $g_2'(\mathfrak{F})$ durch die Gleichungen:

$$g_1'(\mathfrak{F}) = \frac{c^2 P_1}{\sqrt{c^2 + \frac{1}{h_1^2}}}\, g_1(\mathfrak{F}), \quad g_2'(\mathfrak{F}) = \frac{c^2 P_2}{\sqrt{c^2 + \frac{1}{h_2^2}}}\, g_2(\mathfrak{F}),$$

so werden $g_1'(x_0)$, $g_1'(y_0)$, $g_1'(z_0)$ die Richtungscosinus der Tangente derjenigen Krümmungslinie, deren Bogenelement $\sqrt{c^2 + \frac{1}{h_1^2}} \cdot \frac{\mathfrak{S}_1}{c^2 P_1}$ ist, und $g_2'(x_0)$, $g_2'(y_0)$, $g_2'(z_0)$ werden die Richtungscosinus der Tangente derjenigen Krümmungslinie, deren Bogenelement $\sqrt{\frac{1}{c^2} + \frac{1}{h_2^2}} \cdot \frac{\mathfrak{S}_2}{c^2 P_2}$ ist.

Für den Krümmungsradius ϱ_1 der ersteren Krümmungslinie ergiebt sich:

$$\frac{1}{\varrho_1} = -\sum g_1'(x_0)\, g_1'(\xi') = \frac{c P_1}{P_2},$$

für den Krümmungsradius ϱ_2 der zweiten folgt:

$$\frac{1}{\varrho_2} = -\sum g_2'(x_0)\, g_2'(\xi') = -\frac{c P_2}{P_1}.$$

Somit besitzt die Fläche (x_0, y_0, z_0) die mittlere Krümmung $c\left(\frac{P_1}{P_2}-\frac{P_2}{P_1}\right)$, aber das constante, negative Krümmungsmass $-c^2$.

Auch die geodätischen Krümmungsradien der Krümmungslinien, die wir mit R_1' und R_2' bezeichnen wollen, sind leicht zu berechnen. Man benutzt hierzu am einfachsten die gemäss den beiden ersten Gleichungen in (11) § 7 geltenden Beziehungen:

$$g_2'\left(\frac{1}{\varrho_1}\right)=\frac{1}{R_1'}\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}\right), \quad g_1'\left(\frac{1}{\varrho_2}\right)=\frac{-1}{R_2'}\left(\frac{1}{\varrho_1}-\frac{1}{\varrho_2}\right),$$

und erhält:

$$\frac{1}{R_1'}=\frac{c^2P_1}{\sqrt{c^2+\frac{1}{h_2^2}}}\left(\frac{1}{R_2}-\frac{1}{P_1}\right), \quad \frac{1}{R_2'}=\frac{c^2P_2}{\sqrt{c^2+\frac{1}{h_1^2}}}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{P_2}\right).$$

Um die partiellen Ableitungen einer Function $\mathfrak{F}$ nach x, y, z durch die Operationen $g_\alpha(\mathfrak{F})$ auszudrücken, wenden wir auf das System:

$$\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial p}=\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial p}+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial p}+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial p},$$
$$\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial q}=\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial q}+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial q}+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial q},$$
$$\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial r}=\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

die Umformungen (1) an und erhalten:

$$\sigma_1\left(g_1(\mathfrak{F})-\sum\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}\varkappa_1\right)+\sigma_3\left(g_2(\mathfrak{F})-\sum\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}\varkappa_2\right)+\frac{a_{13}}{\sqrt{a_{33}}}\left(g_0(\mathfrak{F})-\sum\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}\xi\right)=0,$$
$$\sigma_2\left(g_1(\mathfrak{F})-\sum\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}\varkappa_1\right)+\sigma_4\left(g_2(\mathfrak{F})-\sum\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}\varkappa_2\right)+\frac{a_{23}}{\sqrt{a_{33}}}\left(g_0(\mathfrak{F})-\sum\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}\xi\right)=0,$$
$$g_0(\mathfrak{F})-\sum\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}\xi=0.$$

Die beiden ersten dieser Gleichungen ergeben in Folge der letzten:

$$g_1(\mathfrak{F})-\sum\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}\varkappa_1=0,$$
$$g_2(\mathfrak{F})-\sum\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}\varkappa_2=0.$$

Somit bestehen die Transformationsgleichungen:

$$(2)\qquad\begin{cases}\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}=\varkappa_1 g_1(\mathfrak{F})+\varkappa_2 g_2(\mathfrak{F})+\xi g_0(\mathfrak{F}),\\ \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial y}=\lambda_1 g_1(\mathfrak{F})+\lambda_2 g_2(\mathfrak{F})+\eta g_0(\mathfrak{F}),\\ \frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}=\mu_1 g_1(\mathfrak{F})+\mu_2 g_2(\mathfrak{F})+\zeta g_0(\mathfrak{F}).\end{cases}$$

Jede n^{te} Ableitung von $\mathfrak{F}$ wird eine n-fach lineare Form der neun Richtungscosinus $\varkappa_1, \varkappa_2, \xi \ldots$.

Wir wenden das System (2) zur Transformation der Lamé'schen Differentialparameter an. Für den ersten Differentialparameter erhält man:

$$(3)\qquad \varDelta_1^2(\mathfrak{F}) = \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}\right)^2 = g_1(\mathfrak{F})^2 + g_2(\mathfrak{F})^2 + g_0(\mathfrak{F})^2,$$

und für den zweiten:

$$(4)\left\{\begin{aligned} \varDelta_2(\mathfrak{F}) = \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathfrak{F}}{\partial z^2} &= g_{11}(\mathfrak{F}) + g_{22}(\mathfrak{F}) + g_{00}(\mathfrak{F}) \\ - g_1(\mathfrak{F})\left(\frac{1}{R_2} + \frac{1}{P_1}\right) &- g_2(\mathfrak{F})\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{P_2}\right) - g_0(\mathfrak{F})\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right). \end{aligned}\right.$$

Will man in diesen Umformungen die partiellen Ableitungen von $\mathfrak{F}$ nach p, q, r hervortreten lassen, so bedient man sich am einfachsten der im § 3 eingeführten Abkürzungen:

$$\mathfrak{F}_p = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial p} - \frac{a_{13}}{a_{33}}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial r}, \qquad \mathfrak{F}_q = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial q} - \frac{a_{23}}{a_{33}}\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial r},$$

wodurch:

$$g_1(\mathfrak{F}) = \frac{\sigma_4 \mathfrak{F}_p - \sigma_3 \mathfrak{F}_q}{\sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3}, \qquad g_2(\mathfrak{F}) = \frac{-\sigma_2 \mathfrak{F}_p + \sigma_1 \mathfrak{F}_q}{\sigma_1\sigma_4 - \sigma_2\sigma_3}$$

wird. Für den ersten Differentialparameter gilt daher die Darstellung:

$$(5)\qquad \varDelta_1^2(\mathfrak{F}) = \frac{G\mathfrak{F}_p^2 - 2F\mathfrak{F}_p\mathfrak{F}_q + E\mathfrak{F}_q^2}{EG - F^2} + \frac{1}{a_{33}}\left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial r}\right)^2.$$

Um Entsprechendes in Bezug auf den zweiten Differentialparameter zu leisten, setzen wir für den Augenblick:

$$A = \frac{G\mathfrak{F}_p - F\mathfrak{F}_q}{\sigma}, \qquad B = \frac{E\mathfrak{F}_q - F\mathfrak{F}_p}{\sigma},$$

dann ist:

$$A = \sigma_4 g_1(\mathfrak{F}) - \sigma_2 g_2(\mathfrak{F}), \qquad B = \sigma_1 g_2(\mathfrak{F}) - \sigma_3 g_1(\mathfrak{F}),$$

und:

$$g_1(\mathfrak{F}) = \frac{\sigma_1}{\sigma}A + \frac{\sigma_2}{\sigma}B, \qquad g_2(\mathfrak{F}) = \frac{\sigma_3}{\sigma}A + \frac{\sigma_4}{\sigma}B.$$

Nun folgt:

$$g_{11}(\mathfrak{F}) + g_{22}(\mathfrak{F}) = A\left\{g_1\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right) + g_2\left(\frac{\sigma_3}{\sigma}\right)\right\} + B\left\{g_1\left(\frac{\sigma_2}{\sigma}\right) + g_2\left(\frac{\sigma_4}{\sigma}\right)\right\} + \frac{1}{\sigma}(A_p + B_q).$$

Aber (vgl. (8) § 7):

$$g_1\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}\right) + g_2\left(\frac{\sigma_3}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\left\{\sigma_1(\sigma_{3q} - \sigma_{4p}) + \sigma_3(\sigma_{2p} - \sigma_{1q})\right\} = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\sigma_1}{R_2} + \frac{\sigma_3}{R_1}\right),$$

$$g_1\left(\frac{\sigma_2}{\sigma}\right) + g_2\left(\frac{\sigma_4}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}\left\{\sigma_2(\sigma_{3q} - \sigma_{4p}) + \sigma_4(\sigma_{2p} - \sigma_{1q})\right\} = \frac{1}{\sigma}\left(\frac{\sigma_2}{R_2} + \frac{\sigma_4}{R_1}\right).$$

Somit lautet das gesuchte Ergebniss:

$$(6)\quad \begin{cases} \Delta_2(\mathfrak{F}) = \dfrac{1}{\sqrt{EG-F^2}}\left\{\left(\dfrac{G\mathfrak{F}_p - F\mathfrak{F}_q}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_p + \left(\dfrac{E\mathfrak{F}_q - F\mathfrak{F}_p}{\sqrt{EG-F^2}}\right)_q\right\} \\ \qquad - \dfrac{g_1(\mathfrak{F})}{P_1} - \dfrac{g_2(\mathfrak{F})}{P_2} - g_0(\mathfrak{F})\left(\dfrac{1}{h_1} + \dfrac{1}{h_2}\right) + g_{00}(\mathfrak{F}). \end{cases}$$

Um eine Anwendung der Gleichung (3) zu machen, beweisen wir mit den entwickelten Mitteln einen von Herrn Weingarten herrührenden Satz über die Bedingung, unter welcher eine Flächenschar einem dreifach orthogonalen Flächensystem angehört. (Journal für die r. u. a. Mathem. Bd. 83, S. 4.) Es sei $s = 0$, und mit μ werde ein integrirender Factor der Differentialform:

$$a_{13}\,dp + a_{23}\,dq + a_{33}\,dr$$

bezeichnet, so dass:

$$\mu\,(a_{12}\,dp + a_{23}\,dq + a_{33}\,dr) = dt,$$
$$t = f(p, q, r).$$

Ist nun $\mathfrak{F}$ eine Function von p, q, r, und denkt man sich r durch seinen Ausdruck in p, q, t ersetzt, so wird die vollständige Ableitung von $\mathfrak{F}$ nach p bez. q durch $\mathfrak{F}_p$ bez. $\mathfrak{F}_q$ dargestellt, weil

$$dr = \frac{dt}{\mu\,a_{33}} - \frac{a_{13}}{a_{33}}\,dp - \frac{a_{23}}{a_{33}}\,dq,$$

und die Ableitung von $\mathfrak{F}$ nach t wird zu $\dfrac{1}{\mu\,a_{33}}\,\dfrac{\partial\mathfrak{F}}{\partial r}$.

Da die vollständigen Ableitungen von t nach p und q verschwinden, wird auch $g_1(t)$ und $g_2(t)$ zu Null, und die Gleichung für den ersten Lamé'schen Differentialparameter von t wird:

$$\sqrt{\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)^2} = g_0(t) = \mu\sqrt{a_{33}}.$$

Setzen wir:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 = a_{33}',$$

so entsteht:

$$\sqrt{a_{33}'} = \frac{1}{\mu\sqrt{a_{33}}}.$$

Aus den für μ geltenden Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial\mu a_{13}}{\partial q} = \frac{\partial\mu a_{23}}{\partial p}, \quad \frac{\partial\mu a_{13}}{\partial r} = \frac{\partial\mu a_{33}}{\partial p}, \quad \frac{\partial\mu a_{23}}{\partial r} = \frac{\partial\mu a_{33}}{\partial q}$$

folgt:

$$(\log\mu)_p = \frac{\dfrac{\partial a_{13}}{\partial r} - \dfrac{\partial a_{33}}{\partial p}}{a_{33}}, \quad (\log\mu)_q = \frac{\dfrac{\partial a_{23}}{\partial r} - \dfrac{\partial a_{33}}{\partial q}}{a_{33}},$$

und bei Berücksichtigung von (8) § 7:

$$(7) \qquad g_1(\log \mu \sqrt{a_{33}}) = \frac{1}{P_1}, \quad g_2(\log \mu \sqrt{a_{33}}) = \frac{1}{P_2},$$

sodass weiter:

$$g_1(\sqrt{a'_{33}}) = -\frac{\sqrt{a'_{33}}}{P_1}, \quad g_2(\sqrt{a'_{33}}) = -\frac{\sqrt{a'_{33}}}{P_2}.$$

Der Weingarten'sche Satz besagt, dass der Ausdruck

$$\frac{\partial \sqrt{a'_{33}}}{\partial x} d\xi + \frac{\partial \sqrt{a'_{33}}}{\partial y} d\eta + \frac{\partial \sqrt{a'_{33}}}{\partial z} d\zeta$$

längs jeder Fläche $t =$ Const. ein vollständiges Differential ist, also die erste Gleichung in (9) § 7 besteht, falls die Flächenschar $t =$ Const. einem dreifach orthogonalen System angehört.

Ist φ eine Function von x, y, z, so geht bei Anwendung unserer Transformationsformeln die Differentialform:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} d\xi + \frac{\partial \varphi}{\partial y} d\eta + \frac{\partial \varphi}{\partial z} d\zeta$$

über in:

$$-\frac{g_1(\varphi)\mathfrak{S}_1}{h_1} - \frac{g_2(\varphi)\mathfrak{S}_2}{h_2}.$$

Soll für letztere Differentialform die erste der Gleichungen (9) § 7 gelten, so muss:

$$-\frac{g_{12}(\varphi)}{h_1} + \frac{g_{21}(\varphi)}{h_2} = -\frac{g_1(\varphi)}{R_1 h_2} + \frac{g_2(\varphi)}{R_2 h_1}$$

sein oder:

$$g_{12}(\varphi) + \frac{g_2(\varphi)}{R_2} = 0.$$

Wenn $\varphi = \sqrt{a'_{33}}$, tritt an Stelle der letzten Gleichung die nachstehende:

$$-g_2\left(\frac{1}{P_1}\right) + \frac{1}{P_1 P_2} - \frac{1}{R_2 P_2} = 0,$$

d. h. aber vermöge der letzten Gleichung des Systems (11) § 7:

$$\vartheta = 0,$$

womit der Weingarten'sche Satz bewiesen ist.

Aus den Gleichungen (7) erhält man einen bekannten Satz über Parallelflächen. Ist $\mathfrak{F}(x, y, z) = t$ die Gleichung einer Flächenschar, so wird $\Delta_1 t$ nur von t abhängen, falls die vollständigen Ableitungen $(\Delta_1 t)_p$ und $(\Delta_1 t)_q$ verschwinden. Dies kommt aber auf das Verschwinden von $g_1(\Delta_1 t)$ und $g_2(\Delta_1 t)$ hinaus, d. h. nach (7) die Grössen $\frac{1}{P_1}$ und $\frac{1}{P_2}$ sind Null. In Folge dessen bilden die orthogonalen Trajectorien der Flächenschar ein Strahlensystem, und die Schar selbst besteht aus Parallelflächen.

Eine Anwendung der Gleichung (4) wird durch die Lösung der folgenden Aufgabe geliefert. Es sollen die Bedingungen ermittelt werden, unter denen bei $\varepsilon = 0$ die Curvenschar aus den orthogonalen Trajectorien einer isothermen Flächenschar besteht. Im genannten Fall ist

$$A = \frac{\Delta_2(t)}{\Delta_1^2(t)}$$

nur von t abhängig, die vollständigen Ableitungen A_p und A_q verschwinden oder, was dasselbe ist, $g_1(A)$ und $g_2(A)$.

Nun ist nach (4):

$$\Delta_2(t) = g_0(\mu \sqrt{a_{33}}) - \mu \sqrt{a_{33}} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right),$$

somit:

$$A = \frac{1}{\mu \sqrt{a_{33}}} \left(g_0(\log \mu \sqrt{a_{33}}) - \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right).$$

Die Gleichungen:

$$g_1(A) = 0, \quad g_2(A) = 0$$

nehmen die Gestalt an:

$$-g_1(\log \mu \sqrt{a_{33}}) \left(g_0(\log \mu \sqrt{a_{33}}) - \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) + g_{01}(\log \mu \sqrt{a_{33}}) - g_1\left(\frac{1}{h_1}\right) - g_1\left(\frac{1}{h_2}\right) = 0,$$

$$-g_2(\log \mu \sqrt{a_{33}}) \left(g_0(\log \mu \sqrt{a_{33}}) - \frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) + g_{02}(\log \mu \sqrt{a_{33}}) - g_2\left(\frac{1}{h_1}\right) - g_2\left(\frac{1}{h_2}\right) = 0.$$

Berücksichtigt man (9) und (11) § 7, so gehen die beiden letzten Gleichungen über in:

$$g_0\left(\frac{1}{P_1}\right) - g_1\left(\frac{1}{h_1}\right) = -\frac{1}{h_2 P_1} + \frac{1}{R_2}\left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1}\right) + \frac{\vartheta}{P_2},$$

$$g_0\left(\frac{1}{P_2}\right) - g_2\left(\frac{1}{h_2}\right) = -\frac{1}{h_1 P_2} + \frac{1}{R_1}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) - \frac{\vartheta}{P_1}.$$

Das Wesentliche dieses Ergebnisses liegt darin, dass die gefundenen Bedingungen den integrirenden Factor μ gar nicht enthalten, während die Bildung von A nicht ohne Kenntniss eines solchen Factors möglich ist. Für die zweite Krümmung der orthogonalen Trajectorien einer isothermen Flächenschar erhält man den Ausdruck:

$$\frac{1}{P_1} g_2\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) - \frac{1}{P_2} g_1\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) + \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right)\frac{1}{P_1 P_2}.$$

Besteht die Schar aus lauter Minimalflächen, so sind die fraglichen Trajectorien ebene Curven.

Dritter Theil.

Doppelt unendliche Curvenschar, festgelegt durch Differentialgleichungen.

§ 13. Normalschar. Besondere Schar. Orthogonale Trajectorien und hervorstechende Arten solcher.

Wir wenden uns jetzt zu dem Fall, dass eine Curvenschar durch Differentialgleichungen von der Form:

$$dx : dy : dz = \xi : \eta : \zeta$$

festgelegt ist, wo, wie früher:

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

während ξ, η, ζ Functionen von x, y, z bedeuten.

Die betrachtete Curvenschar ist eine *Normalschar*, wenn es möglich ist, den Ausdruck:

$$\xi\, dx + \eta\, dy + \zeta\, dz$$

durch Multiplication mit einem geeigneten Factor in das Differential einer Function von x, y, z überzuführen. Die hierzu nöthige Bedingung lautet bekanntlich:

$$\xi\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right) + \eta\left(\frac{\partial \xi}{\partial z} - \frac{\partial \zeta}{\partial x}\right) + \zeta\left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}\right) = 0. \tag{1}$$

Die linke Seite dieser Gleichung muss proportional der Grösse ε sein. Um den Proportionalitätsfactor zu bestimmen, bemerke man, dass nach (2) § 12 und (10) § 7:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z} = 2\varepsilon\xi + \frac{\varkappa_2}{P_1} - \frac{\varkappa_1}{P_2}.$$

Der gesuchte Factor ist also gleich 2.

Bei Anwendung der Bezeichnungen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \xi_1, \quad \frac{\partial \xi}{\partial y} = \xi_2, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} = \xi_3, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = \eta_1, \text{ u. s. f.}$$

$$e_1 = \frac{1}{2}(\zeta_2 - \eta_3), \quad e_2 = \frac{1}{2}(\xi_3 - \zeta_1), \quad e_3 = \frac{1}{2}(\eta_1 - \xi_2) \tag{2}$$

folgt:

$$\varepsilon = e_1\xi + e_2\eta + e_3\zeta. \tag{3}$$

Wie im § 6 verstehen wir unter a_1, b_1, c_1 oder a_2, b_2, c_2 die Richtungscosinus der Haupt- oder Binormalen der Curven der Schar, unter ϱ oder ϱ' seien die Radien ihrer ersten oder zweiten Krümmung verstanden.

Man erhält dann nach der ersten Frenet'schen Formel:

$$(4)\qquad \begin{cases} \frac{a_1}{\varrho} = \xi_1\xi + \xi_2\eta + \xi_3\zeta = 2(e_2\zeta - e_3\eta), \\ \frac{b_1}{\varrho} = \eta_1\xi + \eta_2\eta + \eta_3\zeta = 2(e_3\xi - e_1\zeta), \\ \frac{c_1}{\varrho} = \zeta_1\xi + \zeta_2\eta + \zeta_3\zeta = 2(e_1\eta - e_2\xi). \end{cases}$$

Die erste Krümmung genügt also der Gleichung:

$$(5)\qquad \frac{1}{\varrho^2} = 4(e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 - \varepsilon^2).$$

Man hat es mit einem Strahlensystem zu thun, wenn:

$$\varepsilon^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2, \quad \text{oder:} \quad e_1 : e_2 : e_3 = \xi : \eta : \zeta,$$

und das Strahlensystem besteht aus den Normalen einer Fläche, wenn:

$$e_1 = e_2 = e_3 = 0,$$

oder mit anderen Worten, wenn der Ausdruck:

$$\xi dx + \eta dy + \zeta dz$$

ein vollständiges Differential ist.

Mit Hülfe dieser Ergebnisse lässt sich der S. 88 erwähnte Satz über Parallelflächen in eine vielfach brauchbarere Form setzen. Ist eine Flächenschar durch die Gleichung:

$$\mathfrak{F}(x, y, z) = t$$

gegeben, so hat man:

$$\xi = \frac{\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}}{\sqrt{L}}, \quad \eta = \frac{\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}}{\sqrt{L}}, \quad \zeta = \frac{\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}}{\sqrt{L}},$$

wo:

$$L = \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}\right)^2 = (\varDelta_1 t)^2.$$

Aber:

$$2e_1 = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}\frac{\partial \frac{1}{\sqrt{L}}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y}\frac{\partial \frac{1}{\sqrt{L}}}{\partial z}, \quad \text{u. s. f.}$$

Es liegt daher eine Parallelflächenschar vor, wenn L constant ist, oder wenn:

$$\frac{\partial L}{\partial x} : \frac{\partial L}{\partial y} : \frac{\partial L}{\partial z} = \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} : \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} : \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}.$$

Nehmen wir:

$$a_2 = \eta c_1 - \zeta b_1,$$

so kommt:

$$(5)\quad a_2 = 2\varrho(-\varepsilon\xi + e_1), \quad b_2 = 2\varrho(-\varepsilon\eta + e_2), \quad c_2 = 2\varrho(-\varepsilon\zeta + e_3),$$

und für die zweite Krümmung ergiebt sich die Gleichung:

$$(6)\left\{\begin{aligned}\frac{1}{\varrho'} = -2\varepsilon - 4\varrho^2\Big\{&\xi^2\left(e_2\frac{\partial e_3}{\partial x} - e_3\frac{\partial e_2}{\partial x}\right) + \eta^2\left(e_3\frac{\partial e_1}{\partial y} - e_1\frac{\partial e_3}{\partial y}\right)\\ &+ \zeta^2\left(e_1\frac{\partial e_2}{\partial z} - e_2\frac{\partial e_1}{\partial z}\right) + \xi\eta\left(e_2\frac{\partial e_3}{\partial y} - e_3\frac{\partial e_2}{\partial y} + e_3\frac{\partial e_1}{\partial x} - e_1\frac{\partial e_3}{\partial x}\right)\\ &+ \eta\zeta\left(e_3\frac{\partial e_1}{\partial z} - e_1\frac{\partial e_3}{\partial z} + e_1\frac{\partial e_2}{\partial y} - e_2\frac{\partial e_1}{\partial y}\right)\\ &+ \xi\zeta\left(e_1\frac{\partial e_2}{\partial x} - e_2\frac{\partial e_1}{\partial x} + e_2\frac{\partial e_3}{\partial z} - e_3\frac{\partial e_2}{\partial z}\right)\Big\}.\end{aligned}\right.$$

Gehen wir nun zur Betrachtung der orthogonalen Trajectorien der Curvenschar über. Bedeuten u, v, w drei Functionen von x, y, z, so bestimmen die Differentialgleichungen

$$dx : dy : dz = u : v : w$$

eine Schar orthogonaler Trajectorien, falls identisch:

$$\xi u + \eta v + \zeta w = 0.$$

Die fraglichen Differentialgleichungen sollen *in der Normalform befindlich* heissen, wenn:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1.$$

Die gegebene Curvenschar ist eine *besondere*, wenn ein Functionensystem u, v, w von der Beschaffenheit bestimmt werden kann, dass beim Fortschreiten auf jeder der entsprechenden, orthogonalen Trajectorien sich die Richtung der Tangente (ξ, η, ζ) nicht ändert (§ 3). Das System u, v, w muss dann den Beziehungen genügen:

$$\begin{aligned}\xi_1 u + \xi_2 v + \xi_3 w &= 0,\\ \eta_1 u + \eta_2 v + \eta_3 w &= 0,\\ \zeta_1 u + \zeta_2 v + \zeta_3 w &= 0,\\ \xi u + \eta v + \zeta w &= 0.\end{aligned}$$

Nehmen wir:

$$(7)\qquad \Delta = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \xi \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 & \eta \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & 0 \end{vmatrix},$$

so kommt die Möglichkeit des Zusammenbestehens der vorigen Beziehungen auf das Verschwinden der Determinante Δ hinaus. Bezeichnen wir nämlich mit $\Delta_{\mu\nu}$ die Adjuncte des Elementes von Δ, welches in der μ^{ten} Zeile und ν^{ten} Reihe steht, so wird:

$$\xi\Delta = \Delta_{14}, \quad \eta\Delta = \Delta_{24}, \quad \zeta\Delta = \Delta_{34}.$$

Die Gleichungen:

$$\Delta_{14} = \Delta_{24} = \Delta_{34} = 0$$

bedeuten aber die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Vorhandensein eines Systems u, v, w mit der fraglichen Eigenschaft.

Die Normalebenen der Curven einer besonderen Schar bilden nur eine zweifach unendliche Mannigfaltigkeit, umhüllen also eine Fläche. Dies folgt mit Hülfe einer Bemerkung des Herrn Voss (Math. Annalen Bd. 23, S. 48) folgendermassen aus dem Verschwinden von Δ.

Nimmt man:

$$m = -(x\xi + y\eta + z\zeta),$$

so sind:

$$\alpha = \frac{\xi}{m}, \quad \beta = \frac{\eta}{m}, \quad \gamma = \frac{\zeta}{m}$$

die Hesse'schen Coordinaten der Normalebenen. Ist ferner:

$$m_\nu = -(x\xi_\nu + y\eta_\nu + z\zeta_\nu),$$

so erhält die Functionaldeterminante J der Grössen α, β, γ die Gestalt

$$\frac{1}{m^6}\begin{vmatrix} \xi_1 m - \xi m_1 + \xi^2 & \xi_2 m - \xi m_2 + \xi\eta & \xi_3 m - \xi m_3 + \xi\zeta \\ \eta_1 m - \eta m_1 + \xi\eta & \eta_2 m - \eta m_2 + \eta^2 & \eta_3 m - \eta m_3 + \eta\zeta \\ \zeta_1 m - \zeta m_1 + \xi\zeta & \zeta_2 m - \zeta m_2 + \eta\zeta & \zeta_3 m - \zeta m_3 + \zeta^2 \end{vmatrix}.$$

Man hat aber:

$$\Delta = \frac{1}{m^2}\begin{vmatrix} \xi_1 m - \xi m_1 + \xi^2 & \xi_2 m - \xi m_2 + \xi\eta & \xi_3 m - \xi m_3 + \xi\zeta & \xi \\ \eta_1 m - \eta m_1 + \xi\eta & \eta_2 m - \eta m_2 + \eta^2 & \eta_3 m - \eta m_3 + \eta\zeta & \eta \\ \zeta_1 m - \zeta m_1 + \xi\zeta & \zeta_2 m - \zeta m_2 + \eta\zeta & \zeta_3 m - \zeta m_3 + \zeta^2 & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & 0 \end{vmatrix}.$$

Addirt man hier die erste mit $\frac{x}{m}$, die zweite mit $\frac{y}{m}$, die dritte mit $\frac{z}{m}$ multiplicirte Zeile zur vierten, so ergiebt sich:

$$\Delta = -m^4 J.$$

Wir fassen nun wie im § 6 Coordinatenlinien und Ableitungen nach ihren Bogenlängen ins Auge. Die in der Normalform vorausgesetzten Differentialgleichungen:

$$dx : dy : dz = u_1 : v_1 : w_1,$$
$$dx : dy : dz = u_2 : v_2 : w_2$$

bestimmen, falls:

$$\xi u_1 + \eta v_1 + \zeta w_1 = \xi u_2 + \eta v_2 + \zeta w_2 = 0,$$

zwei Scharen orthogonaler Trajectorien, die sich unter dem Winkel φ schneiden mögen. Nehmen wir:

$$u_2' = \frac{u_1 - u_2 \cos\varphi}{\sin\varphi}, \quad u_1' = \frac{-u_1 \cos\varphi + u_2}{\sin\varphi}, \text{ u. s. f.,}$$

so bestimmen die Differentialgleichungen:

$$dx : dy : dz = u_1' : v_1' : w_1',$$
$$dx : dy : dz = u_2' : v_2' : w_2'$$

diejenigen orthogonalen Trajectorien der Curvenschar, welche die beiden

vorigen Scharen rechtwinklig durchdringen. Setzt man nun:

$$dx = u_1 T_1 + u_2 T_2 + \xi T_0,$$

so wird:

$$T_1 = \frac{u_2' dx + v_2' dy + w_2' dz}{\sin \varphi}$$

$$T_2 = \frac{u_1' dx + v_1' dy + w_1' dz}{\sin \varphi},$$

$$T_0 = \xi dx + \eta dy + \zeta dz,$$

und die Ableitungen einer Function $\mathfrak{F}$ nach den Bogenlängen der Curven $T_2 = 0$, $T_1 = 0$ erhalten die Gestalt:

$$(d\mathfrak{F})_{T_1} = u_1 \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + v_1 \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} + w_1 \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z},$$

$$(d\mathfrak{F})_{T_2} = u_2 \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + v_2 \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} + w_2 \frac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}.$$

Wir knüpfen hieran die Bestimmung der im § 6 hervorgehobenen ausgezeichneten Arten orthogonaler Trajectorien.

Die Differentialgleichungen der Haupt- und Binormallinien sind nach dem Obigen:

$$dx : dy : dz = e_2 \zeta - e_3 \eta : e_3 \xi - e_1 \zeta : e_1 \eta - e_2 \xi,$$

$$dx : dy : dz = \varepsilon \xi - e_1 : \varepsilon \eta - e_2 : \varepsilon \zeta - e_3.$$

Als Bedingung für die Krümmungslinien erster Art fanden wir in (7) § 6:

$$\cos \varphi = 0, \quad \sum (dx)_{T_1} (d\xi)_{T_2} + \sum (dx)_{T_2} (d\xi)_{T_1} = 0.$$

Die zweite dieser Bedingungen nimmt unter Benutzung der Bezeichnungen:

$$a_{11} = \xi_1, \quad a_{22} = \eta_2, \quad a_{33} = \zeta_3,$$

$$a_{12} = \frac{1}{2}(\xi_2 + \eta_1), \quad a_{13} = \frac{1}{2}(\xi_3 + \zeta_1), \quad a_{23} = \frac{1}{2}(\eta_3 + \zeta_2)$$

die Gestalt an:

$$u_2 (a_{11} u_1 + a_{12} v_1 + a_{13} w_1) + v_2 (a_{12} u_1 + a_{22} v_1 + a_{23} w_1) + w_2 (a_{13} u_1 + a_{23} v_1 + a_{33} w_1) = 0.$$

Da ausserdem:

$$u_2 u_1 + v_2 v_1 + w_2 w_1 = 0, \quad u_2 \xi + v_2 \eta + w_2 \zeta = 0,$$

so werden die fraglichen beiden Werthsysteme (u, v, w) durch die Gleichungen festgelegt:

$$(8)\begin{cases} (a_{11} u + a_{12} v + a_{13} w)(\eta w - \zeta v) + (a_{12} u + a_{22} v + a_{23} w)(\zeta u - \xi w) \\ \qquad + (a_{13} u + a_{23} v + a_{33} w)(\xi v - \eta u) = 0, \end{cases}$$

$$\xi u + \eta v + \zeta w = 0, \quad u^2 + v^2 + w^2 = 1.$$



Die Krümmungslinien zweiter Art ergeben sich aus der Bedingung:

$$\frac{1}{l_{T_1}} = \sum (dx)_{T_1'} (d\xi)_{T_1} = 0,$$

oder:

$$u_1' (\xi_1 u_1 + \xi_2 v_1 + \xi_3 w_1) + v_1' (\eta_1 u_1 + \eta_2 v_1 + \eta_3 w_1) + w_1' (\zeta_1 u_1 + \zeta_2 v_1 + \zeta_3 w_1) = 0.$$

Nimmt man zur ersten dieser Bedingungen die Beziehungen:

$$u_1' \xi + v_1' \eta + w_1' \zeta = 0, \quad u_1' u_1 + v_1' v_1 + w_1' w_1 = 0$$

hinzu, so erhält die gesuchte Bestimmungsgleichung die Gestalt:

$$(9) \begin{cases} (\xi_1 u + \xi_2 v + \xi_3 w)(\eta w - \zeta v) + (\eta_1 u + \eta_2 v + \eta_3 w)(\zeta u - \xi w) \\ \qquad + (\zeta_1 u + \zeta_2 v + \zeta_3 w)(\xi v - \eta u) = 0. \end{cases}$$

Die Asymptotenlinien werden festgelegt durch die Bedingung:

$$\frac{1}{h_{T_1}} = -\sum (dx)_{T_1} (d\xi)_{T_1} = 0.$$

Dies ergiebt:

$$(10) \quad a_{11} u^2 + a_{22} v^2 + a_{33} w^2 + 2 a_{12} u v + 2 a_{13} u w + 2 a_{23} v w = 0.$$

Bei den geodätischen Linien endlich verschwindet die Grösse:

$$\frac{1}{R_{T_1}} = \sum (dx)_{T_1'} (dx)_{T_1^2}.$$

Dies ergiebt für u, v, w die Bestimmungsgleichung:

$$(11) \begin{cases} (\eta w - \zeta v)\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}\right) + (\zeta u - \xi w)\left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}\right) \\ \qquad + (\xi v - \eta u)\left(u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0. \end{cases}$$

Diejenige Schar orthogonaler Trajectorien, welche der durch die Differentialgleichungen:

$$dx : dy : dz = u : v : w$$

festgelegten Schar adjungirt ist, wird bestimmt durch das System:

$$(12) \begin{cases} dx : dy : dz = (\eta \zeta_1 - \zeta \eta_1) u + (\eta \zeta_2 - \zeta \eta_2) v + (\eta \zeta_3 - \zeta \eta_3) w : \\ \qquad (\zeta \xi_1 - \xi \zeta_1) u + (\zeta \xi_2 - \xi \zeta_2) v + (\zeta \xi_3 - \xi \zeta_3) w : \\ \qquad (\xi \eta_1 - \eta \xi_1) u + (\xi \eta_2 - \eta \xi_2) v + (\xi \eta_3 - \eta \xi_3) w. \end{cases}$$

§ 14. Isotrope Curvenschar. Die Grössen $h_1, h_2, \rho_1, \rho_2, \mathfrak{r}_1, \mathfrak{r}_2$. Eine Bestimmungsweise der Krümmungslinien erster Art.

Die Normalkrümmung einer orthogonalen Trajectorie besitzt den Ausdruck:

$$(1) \quad \frac{1}{h} = -(a_{11} u^2 + a_{22} v^2 + a_{33} w^2 + 2 a_{12} u v + 2 a_{13} u w + 2 a_{23} v w).$$

Wir suchen zunächst die Bedingung dafür, dass dieser Ausdruck von u, v, w unabhängig ist, d. h. die Bedingung für eine isotrope Curvenschar. Man erhält sie am einfachsten durch Elimination einer der Grössen u, v, w, etwa w. Multiplicirt man $\frac{1}{h}$ mit ζ^2 und dividirt durch $\zeta^2 (u^2 + v^2 + w^2)$, so entsteht:

$$\frac{1}{h} = \frac{u^2(a_{11}\zeta^2 - 2a_{13}\xi\zeta + a_{33}\xi^2) + 2uv(a_{12}\zeta^2 + a_{33}\xi\eta - a_{13}\eta\zeta - a_{23}\xi\zeta) + v^2(a_{22}\zeta^2 - 2a_{23}\eta\zeta + a_{33}\eta^2)}{u^2(\xi^2 + \zeta^2) + 2uv\,\xi\eta + v^2(\eta^2 + \zeta^2)}.$$

Bezeichnet λ einen Proportionalitätsfactor, so tritt der fragliche Fall ein, wenn:

$$\begin{aligned} \xi^2 + \zeta^2 &= \lambda\,(a_{11}\zeta^2 + a_{33}\xi^2 - 2a_{13}\xi\zeta), \\ \zeta^2 + \eta^2 &= \lambda\,(a_{22}\zeta^2 + a_{33}\eta^2 - 2a_{23}\eta\zeta), \\ \xi\eta &= \lambda\,(a_{12}\zeta^2 + a_{33}\xi\eta - a_{13}\eta\zeta - a_{23}\xi\zeta). \end{aligned}$$

Die letzte dieser Gleichungen liefert nach Multiplication mit $2\xi\eta$ unter Berücksichtigung der beiden vorhergehenden:

$$\begin{aligned} 2\xi^2\eta^2 = \lambda\,(2a_{12}\xi\eta\zeta^2 + 2a_{33}\xi^2\eta^2) + \eta^2(\xi^2 + \zeta^2) - \eta^2\lambda\,(a_{11}\zeta^2 + a_{33}\xi^2) \\ + \xi^2(\zeta^2 + \eta^2) - \lambda\xi^2(a_{22}\zeta^2 + a_{33}\eta^2), \end{aligned}$$

oder:

$$\eta^2 + \xi^2 = \lambda\,(a_{11}\eta^2 + a_{22}\xi^2 - 2a_{12}\xi\eta).$$

Jetzt folgt durch Addition:

$$\begin{aligned} 2 = \lambda\{a_{11}(\zeta^2 + \eta^2) + a_{22}(\xi^2 + \zeta^2) + a_{33}(\xi^2 + \eta^2) - 2a_{12}\xi\eta \\ - 2a_{13}\xi\zeta - 2a_{23}\eta\zeta\}. \end{aligned}$$

Der hier auftretende Klammerausdruck lässt eine merkliche Vereinfachung zu. Man hat:

$$(2)\quad \begin{cases} a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta = \frac{1}{2}(\xi_1\xi + \xi_2\eta + \xi_3\zeta) = \frac{a_1}{2\varrho}, \\ a_{12}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta = \frac{1}{2}(\eta_1\xi + \eta_2\eta + \eta_3\zeta) = \frac{b_1}{2\varrho}, \\ a_{13}\xi + a_{23}\eta + a_{33}\zeta = \frac{1}{2}(\zeta_1\xi + \zeta_2\eta + \zeta_3\zeta) = \frac{c_1}{2\varrho}, \end{cases}$$

und damit wird:

$$2 = \lambda\,(a_{11} + a_{22} + a_{33}).$$

Wir finden so die Bedingungen für den in Rede stehenden Fall in der Form:

$$(3)\quad \begin{cases} (\xi^2 - \zeta^2)\,a_{11} + (\xi^2 + \zeta^2)\,a_{22} + (\zeta^2 - \xi^2)\,a_{33} + 4a_{13}\xi\zeta = 0, \\ (\zeta^2 + \eta^2)\,a_{11} + (\eta^2 - \zeta^2)\,a_{22} + (\zeta^2 - \eta^2)\,a_{33} + 4a_{23}\eta\zeta = 0, \\ (\xi^2 - \eta^2)\,a_{11} + (\eta^2 - \xi^2)\,a_{22} + (\eta^2 + \xi^2)\,a_{33} + 4a_{12}\eta\xi = 0. \end{cases}$$

Jede dieser Gleichungen ist eine Folge der beiden anderen.

Will man auf Grund dieser Bedingungen zeigen, dass die Curvenscharen, deren Normalen einen Liniencomplex ersten Grades bilden, isotrop sind, so berücksichtige man, dass hier:

$$\xi = \frac{a + \gamma y - \beta z}{N}, \quad \eta = \frac{b + \alpha z - \gamma x}{N}, \quad \zeta = \frac{c + \beta x - \alpha y}{N},$$

wo $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ Constante bedeuten. Man findet:

$$\begin{aligned}
N\xi_1 &= \xi(\gamma\eta - \beta\zeta), & N\xi_2 &= \gamma - \xi(\xi\gamma - \alpha\zeta), \\
& & N\xi_3 &= -\beta - \xi(\alpha\eta - \beta\xi), \\
N\eta_1 &= -\gamma - \eta(\beta\zeta - \gamma\eta), & N\eta_2 &= \eta(\alpha\zeta - \gamma\xi), \\
& & N\eta_3 &= \alpha - \eta(\alpha\eta - \beta\xi), \\
N\zeta_1 &= \beta - \zeta(\beta\zeta - \alpha\eta), & N\zeta_2 &= -\alpha - \zeta(\gamma\xi - \alpha\zeta), \\
& & N\zeta_3 &= \zeta(\beta\xi - \alpha\eta).
\end{aligned}$$

Mit Hülfe dieser Formeln erkennt man leicht das Bestehen der Gleichungen (3). Da ferner:

$$e_1 = \frac{-1}{2N}(\alpha + \xi(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)), \quad e_2 = \frac{-1}{2N}(\beta + \eta(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)),$$
$$e_3 = \frac{-1}{2N}(\gamma + \zeta(\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta)),$$

so wird:

$$\varepsilon = -\frac{\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta}{N} = -\frac{a\alpha + b\beta + c\gamma}{N^2}.$$

Es liegt also nur dann eine Normalschar vor, wenn der Liniencomplex ein specieller ist.

Wir schliessen das Bestehen der Gleichungen (3) aus und fragen nach dem grössten und kleinsten Werthe von $\frac{1}{h}$. Bedeuten m und n zwei vorläufig unbestimmte Functionen, so sind die partiellen Ableitungen nach u, v, w des Ausdrucks:

$$a_{11}u^2 + a_{22}v^2 + a_{33}w^2 + 2a_{12}uv + 2a_{23}vw + 2a_{13}uw$$
$$+ 2m(\xi u + \eta v + \zeta w) + n(u^2 + v^2 + w^2 - 1)$$

gleich Null zu setzen. Hierdurch entsteht das System:

$$(2) \quad \begin{cases} a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w + m\xi + nu = 0, \\ a_{12}u + a_{22}v + a_{23}w + m\eta + nv = 0, \\ a_{13}u + a_{23}v + a_{33}w + m\zeta + nw = 0, \end{cases}$$

wozu die Beziehung kommt:

$$\xi u + \eta v + \zeta w = 0.$$

Die Gleichung (8) des vorigen Paragraphen zeigt, dass die hier auftretenden Werthe u, v, w die Richtungscosinus der Tangenten der Krümmungslinien erster Art darstellen.

Um die Bedeutung der Grösse m zu erkennen, berücksichtige man, dass:

$$a_{11}\xi + a_{12}\eta + a_{13}\zeta = e_2\zeta - e_3\eta = \frac{1}{2}\left(\frac{\varkappa_1}{P_1} + \frac{\varkappa_2}{P_2}\right),$$

$$a_{12}\xi + a_{22}\eta + a_{23}\zeta = e_3\xi - e_1\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda_1}{P_1} + \frac{\lambda_2}{P_2}\right),$$

$$a_{13}\xi + a_{23}\eta + a_{33}\zeta = e_1\eta - e_2\xi = \frac{1}{2}\left(\frac{\mu_1}{P_1} + \frac{\mu_2}{P_2}\right).$$

Man hat also für $u = \varkappa_1$ u. s. f.:

$$m = -\frac{1}{2P_1},$$

für $u = \varkappa_2$ u. s. f.:

$$m = -\frac{1}{2P_2}.$$

Die Grösse n hat die beiden Werthe $\frac{1}{h_1}$ und $\frac{1}{h_2}$. Dieselben sind die Wurzeln der Gleichung:

$$(3)\qquad \begin{vmatrix} a_{11}+\frac{1}{h} & a_{12} & a_{13} & \xi \\ a_{12} & a_{22}+\frac{1}{h} & a_{23} & \eta \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}+\frac{1}{h} & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Die Determinante:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \xi \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & \eta \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & 0 \end{vmatrix}$$

soll mit D, die Adjuncten ihrer Elemente mit $D_{\mu\nu}$ bezeichnet werden, wo μ die Zeile, ν die Reihe angiebt. An Stelle von (3) entsteht dann:

$$(4)\qquad \frac{1}{h^2} + \frac{\xi_1 + \eta_2 + \zeta_3}{h} - D = 0.$$

Der Zusammenhang zwischen den Determinanten D und Δ ergiebt sich so. Man hat:

$$a_{12} = \xi_2 + e_3 = \eta_1 - e_3,\quad a_{23} = \eta_3 + e_1 = \zeta_2 - e_1,\quad a_{13} = \zeta_1 + e_2 = \xi_3 - e_2.$$

Somit ist:

$$D = \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 + e_3 & \xi_3 - e_2 & \xi \\ \eta_1 - e_3 & \eta_2 & \eta_3 + e_1 & \eta \\ \zeta_1 + e_2 & \zeta_2 - e_1 & \zeta_3 & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & 0 \end{vmatrix}.$$

Bezeichnet man die Adjuncten der drei ersten Elemente der letzten Zeile dieser Determinante für den Augenblick mit A, B, C, so erkennt man, dass B aus A, C aus B durch gleichzeitige cyclische Vertauschung der Zeichen ξ, η, ζ und der Zahlen 1, 2, 3 hervorgeht. Man hat aber:

$$-A = \begin{vmatrix} \xi_2 & \xi_3 & \xi \\ \eta_2 & \eta_3 & \eta \\ \zeta_2 & \zeta_3 & \zeta \end{vmatrix} + \zeta(e_1\xi_2 + e_2\eta_2 + e_3\zeta_2) - \eta(e_1\xi_3 + e_2\eta_3 + e_3\zeta_3) - e_1\varepsilon,$$

sodass:

$$D = \Delta + \varepsilon^2.$$

Die beiden Werthe von $\frac{1}{h}$, welche die Punkte liefern, in denen die Tangente (ξ) von einer benachbarten ($\xi + \delta\xi$) geschnitten wird, haben wir mit $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_2}$ bezeichnet. Zu ihrer Bestimmung dient der Umstand, dass hier:

$$\sum \delta x\,(\eta\,\delta\zeta - \zeta\,\delta\eta) = 0 \quad \text{und} \quad \sum \xi\,\delta x = 0,$$

oder:

$$\delta x : \delta y : \delta z = \delta\xi : \delta\eta : \delta\zeta.$$

Nehmen wir:

$$-\frac{\delta x}{h} = \delta\xi, \quad -\frac{\delta y}{h} = \delta\eta, \quad -\frac{\delta z}{h} = \delta\zeta,$$

so fallen die mit diesen Gleichungen verträglichen Werthe von h mit ϱ_1 und ϱ_2 zusammen. Für die entsprechenden Grössen u, v, w ist also:

$$\left(\xi_1 + \frac{1}{h}\right) u + \xi_2 v + \xi_3 w = 0,$$

$$\eta_1 u + \left(\eta_2 + \frac{1}{h}\right) v + \eta_3 w = 0,$$

$$\zeta_1 u + \zeta_2 v + \left(\zeta_3 + \frac{1}{h}\right) w = 0.$$

Sie genügen der Gleichung (9) § 13 und sind die Richtungscosinus der Tangenten der Krümmungslinien zweiter Art. Die Grössen $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho}$ sind die Wurzeln der Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \xi_1 + \frac{1}{h} & \xi_2 & \xi_3 \\ \eta_1 & \eta_2 + \frac{1}{h} & \eta_3 \\ \zeta_1 & \zeta_2 & \zeta_3 + \frac{1}{h} \end{vmatrix} = 0,$$

oder:

$$\frac{1}{h^2} + \frac{\xi_1 + \eta_2 + \zeta_3}{h} + \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_2 \\ \eta_1 & \eta_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi_1 & \xi_3 \\ \zeta_1 & \zeta_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \eta_2 & \eta_3 \\ \zeta_2 & \zeta_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Behufs Umformung des letzten Gliedes dieser Gleichung bemerke man, das $\varDelta_{14}$ mit Hülfe der Beziehungen:

$$\xi\xi_\nu + \eta\eta_\nu + \zeta\zeta_\nu = 0$$

auf die Form gebracht werden kann:

$$-\xi(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 + \eta_2\zeta_3 - \eta_3\zeta_2 + \zeta_3\xi_1 - \zeta_1\xi_3).$$

Da aber:

$$\xi\varDelta = \varDelta_{14},$$

so wird die Gleichung zur Bestimmung von ϱ_1 und ϱ_2:

$$\frac{1}{h^2} + \frac{\xi_1 + \eta_2 + \zeta_3}{h} - \varDelta = 0. \tag{5}$$

Für die Abscisse $\mathfrak{r}$ des kürzesten Abstandes der benachbarten Tangenten (ξ) und $(\xi + \delta\xi)$ fanden wir den Ausdruck:

$$\mathfrak{r} = -\frac{\Sigma\delta x\,\delta\xi}{\Sigma\delta\xi^2}.$$

Wir setzen die Curvenschar als eine allgemeine voraus, sodass $\varDelta$ von Null verschieden ist, und fragen nach dem grössten und kleinsten Werth von $\mathfrak{r}$. Man nehme:

$$a = \xi_1 u + \xi_2 v + \xi_3 w,$$
$$b = \eta_1 u + \eta_2 v + \eta_3 w,$$
$$c = \zeta_1 u + \zeta_2 v + \zeta_3 w.$$

Da:

$$\xi u + \eta v + \zeta w = 0,$$

folgt umgekehrt:

$$\left\{\begin{aligned} u &= \frac{1}{\varDelta}(\varDelta_{11}a + \varDelta_{21}b + \varDelta_{31}c), \\ v &= \frac{1}{\varDelta}(\varDelta_{12}a + \varDelta_{22}b + \varDelta_{32}c), \\ w &= \frac{1}{\varDelta}(\varDelta_{13}a + \varDelta_{23}b + \varDelta_{33}c). \end{aligned}\right. \tag{6}$$

Setzt man noch:

$$\frac{1}{2}(\varDelta_{\mu\nu} + \varDelta_{\nu\mu}) = b_{\mu\nu} = b_{\nu\mu},$$

so wird:

$$\mathfrak{r} = -\frac{b_{11}a^2 + b_{22}b^2 + b_{33}c^2 + 2b_{12}ab + 2b_{13}ac + 2b_{23}bc}{\varDelta(a^2 + b^2 + c^2)}. \tag{7}$$

Zur Bestimmung der ausgezeichneten Werthe $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ von $\mathfrak{r}$ setzen wir die Ableitungen nach a, b, c des Ausdrucks

$$-\mathfrak{r}\varDelta + 2m(\xi a + \eta b + \zeta c)$$

gleich Null und erhalten, wenn noch

$$a^2 + b^2 + c^2 = s$$

genommen wird:

$$(8) \qquad \begin{cases} b_{11} a + b_{12} b + b_{13} c + \mathfrak{r} a \varDelta + m s \xi = 0, \\ b_{12} a + b_{22} b + b_{23} c + \mathfrak{r} b \varDelta + m s \eta = 0, \\ b_{13} a + b_{23} b + b_{33} c + \mathfrak{r} c \varDelta + m s \zeta = 0, \end{cases}$$

wozu die Gleichung kommt:

$$\xi a + \eta b + \zeta c = 0.$$

Die fraglichen Werthe von $\mathfrak{r}$ genügen daher der Beziehung:

$$\begin{vmatrix} b_{11} + \mathfrak{r}\varDelta & b_{12} & b_{13} & \xi \\ b_{12} & b_{22} + \mathfrak{r}\varDelta & b_{23} & \eta \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} + \mathfrak{r}\varDelta & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

dieselbe ist quadratisch, der Factor von $\mathfrak{r}^2 \varDelta^2$ ist -1, der von $\mathfrak{r}\varDelta$ ist:

$$-(b_{11} + b_{22} + b_{33}) + \xi (b_{11}\xi + b_{12}\eta + b_{13}\zeta) + \eta (b_{12}\xi + b_{22}\eta + b_{23}\zeta) \\ + \zeta (b_{13}\xi + b_{23}\eta + b_{33}\zeta),$$

während das absolute Glied die Gestalt hat:

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & \xi \\ b_{12} & b_{22} & b_{23} & \eta \\ b_{13} & b_{23} & b_{33} & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & 0 \end{vmatrix}.$$

Zur Umformung dieser Coefficienten bemerke man zunächst, dass:

$$b_{11} = 2 a_{23} \eta \zeta - a_{22} \zeta^2 - a_{33} \eta^2, \quad b_{12} = - a_{13} \eta \zeta + a_{33} \eta \xi - a_{23} \zeta \xi + a_{12} \zeta^2,$$
$$b_{22} = 2 a_{13} \xi \eta - a_{33} \xi^2 - a_{11} \zeta^2, \quad b_{23} = - a_{12} \xi \zeta + a_{11} \eta \zeta - a_{13} \eta \xi + a_{23} \xi^2,$$
$$b_{33} = 2 a_{12} \eta \zeta - a_{11} \eta^2 - a_{22} \xi^2, \quad b_{13} = - a_{23} \eta \xi + a_{22} \zeta \xi - a_{12} \eta \zeta + a_{13} \eta^2.$$

Wird nun:

$$\begin{aligned} \alpha &= a_{11} + a_{22} + a_{33}, \\ \alpha_1 &= a_{11} \xi + a_{12} \eta + a_{13} \zeta, \\ \alpha_2 &= a_{12} \xi + a_{22} \eta + a_{23} \zeta, \\ \alpha_3 &= a_{13} \xi + a_{23} \eta + a_{33} \zeta \end{aligned}$$

gesetzt, so folgt:

$$\alpha_1 \xi + \alpha_2 \eta + \alpha_3 \zeta = 0,$$

und:

$$b_{11} = \alpha (\xi^2 - 1) - 2 \xi \alpha_1 + a_{11}, \quad b_{12} = \xi \eta \alpha - \eta \alpha_1 - \xi \alpha_2 + a_{12},$$
$$b_{22} = \alpha (\eta^2 - 1) - 2 \eta \alpha_2 + a_{22}, \quad b_{23} = \eta \zeta \alpha - \zeta \alpha_2 - \eta \alpha_3 + a_{23},$$
$$b_{33} = \alpha (\zeta^2 - 1) - 2 \zeta \alpha_3 + a_{33}, \quad b_{13} = \zeta \xi \alpha - \xi \alpha_3 - \zeta \alpha_1 + a_{13}.$$

Dies zeigt, dass:

$$b_{11} + b_{22} + b_{33} = -\alpha, \quad b_{1\nu}\xi + b_{2\nu}\eta + b_{3\nu}\zeta = 0, \quad (\nu = 1, 2, 3),$$

sodass der Coefficient von $\mathfrak{r}\Delta$ gleich α wird.

Das absolute Glied wird nach einfacher Umformung zu:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \alpha & a_{12} & a_{13} & \xi \\ a_{12} & a_{22} - \alpha & a_{23} & \eta \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - \alpha & \zeta \\ \xi & \eta & \zeta & 0 \end{vmatrix} = D.$$

Die Bestimmungsgleichung für $\mathfrak{r}_1$ und $\mathfrak{r}_2$ hat demnach die Gestalt:

$$\mathfrak{r}^2\Delta^2 - \alpha\mathfrak{r}\Delta - D = 0. \tag{9}$$

Aus (4), (5) und (9) ergiebt sich wie im zweiten Theil:

$$\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2}, \quad \frac{1}{h_1 h_2} = \frac{1}{\varrho_1\varrho_2} - \varepsilon^2, \quad \mathfrak{r}_1 = \frac{\varrho_1\varrho_2}{h_2}, \quad \mathfrak{r}_2 = \frac{\varrho_1\varrho_2}{h_1}.$$

Für die dem System (8) genügenden Werthe a, b, c erhält man die Gleichung:

$$(10)\begin{cases}(b_{11}a + b_{12}b + b_{13}c)(\eta c - \zeta b) + (b_{12}a + b_{22}b + b_{23}c)(\zeta a - \xi c) \\ \qquad + (b_{13}a + b_{23}b + b_{33}c)(\xi b - \eta a) = 0.\end{cases}$$

Nimmt man:

$$a\alpha_1 + b\alpha_2 + c\alpha_3 = \alpha',$$

so entsteht:

$$b_{11}a + b_{12}b + b_{13}c = -\alpha a - \xi\alpha' + a a_{11} + b a_{12} + c a_{13},$$
$$b_{12}a + b_{22}b + b_{23}c = -\alpha b - \eta\alpha' + a a_{12} + b a_{22} + c a_{23},$$
$$b_{12}a + b_{23}b + b_{33}c = -\alpha c - \zeta\alpha' + a a_{13} + b a_{23} + c a_{33}.$$

Man erhält also an Stelle von (10):

$$(11)\begin{cases}(a_{11}a + a_{12}b + a_{13}c)(\eta c - \zeta b) + (a_{12}a + a_{22}b + a_{23}c)(\zeta a - \xi c) \\ \qquad + (a_{13}a + a_{23}b + a_{33}c)(\xi b - \eta a) = 0.\end{cases}$$

In Folge von (8) § 13 sind die hierdurch festgelegten Werthsysteme a, b, c proportional den Richtungscosinus der Tangenten der Krümmungslinien erster Art. Wir bezeichnen sie mit a', b', c' und a'', b'', c''. Nun bestimmt das Werthsystem a', b', c' gemäss (6) eine Verrückung des Punktes (x, y, z), für die:

$$\delta x : \delta y : \delta z = u' : v' : w'$$

sei. Dieselbe bestimmt eine der Tangente (ξ, η, ζ) benachbarte Tangente. Die Richtungscosinus des kürzesten Abstandes beider Tangenten sind proportional den Grössen:

$$\eta c' - \zeta b', \quad \zeta a' - \xi c', \quad \xi b' - \eta a',$$

oder nach (11) den Grössen a'', b'', c''. Ebenso bestimmt die den Werthen a'', b'', c'' entsprechende Verrückung, für welche:

$$\delta x : \delta y : \delta z = u'' : v'' : w''$$

sei, einen kürzesten Abstand zweier benachbarter Tangenten, dessen Richtungscosinus proportional den Werthen a', b', c' sind. Damit erweisen sich die fraglichen beiden kürzesten Abstände als parallel den Tangenten der Krümmungslinien erster Art.

Zum Schluss dieses Paragraphen sei eine der Berechnungsarten der Grössen $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, u. s. f. hervorgehoben. Sie müssen proportional sein den Adjuncten der drei ersten Elemente der letzten Zeile der Determinante in (3). Dies liefert, wenn ν eine Zahlen 1, 2 und p_ν einen Proportionalitätsfactor bedeutet:

$$(12)\begin{cases} p_\nu \varkappa_\nu = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} & \xi \\ a_{22}+\frac{1}{h_\nu} & a_{23} & \eta \\ a_{23} & a_{33}+\frac{1}{h_\nu} & \zeta \end{vmatrix} = D_{41} - \frac{\xi}{h_\nu^2} + \frac{a_{12}\eta + a_{13}\zeta - (a_{22}+a_{33})\xi}{h_\nu} \\ \qquad = D_{41} - \xi D + \frac{\alpha_1}{h_\nu}. \end{cases}$$

Ebenso:

$$p_\nu \lambda_\nu = D_{42} - \eta D + \frac{\alpha_2}{h_\nu}, \quad p_\nu \mu_\nu = D_{43} - \zeta D + \frac{\alpha_3}{h_\nu},$$

folglich:

$$p_1 \varkappa_1 - p_2 \varkappa_2 = \alpha_1 \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right).$$

Da aber, wie oben gefunden:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\varkappa_1}{P_1} + \frac{\varkappa_2}{P_2}\right),$$

so ist:

$$(13) \qquad p_1 = \frac{1}{2P_1}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right), \quad p_2 = \frac{-1}{2P_2}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right).$$

Dies zeigt, dass wenn nur eine der Grössen p_ν verschwindet, die Krümmungslinien erster Art mit den Haupt- und Binormallinien zusammenfallen, dass man es aber mit einem Strahlensystem zu thun hat, falls beide Grössen p_ν verschwinden. Für Strahlensysteme ist also die in Rede stehende Bestimmungsart von $\varkappa_1$, $\varkappa_2 \cdots$ ganz unbrauchbar.

Aus (12) ergiebt sich weiter:

$$p_2 \varkappa_1 = \zeta D_{42} - \eta D_{43} - \frac{e_1 - \varepsilon \xi}{h_2}.$$

Aber:

$$\zeta D_{42} - \eta D_{43} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \xi \\ a_{12} & a_{23} & \eta \\ \alpha_1 & \alpha_3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \xi \\ \alpha_1 & \alpha_2 & 1 \\ a_{13} & a_{23} & \zeta \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}(\alpha_2 \zeta - \alpha_3 \eta) + a_{12}(\alpha_3 \xi - \alpha_1 \zeta) + a_{13}(\alpha_1 \eta - \alpha_2 \xi) = \varepsilon \alpha_1 - \sum e_\nu \xi_\nu.$$

Setzt man:

$N_{1\nu} = \xi_1 \xi_\nu + \xi_2 \eta_\nu + \xi_3 \zeta_\nu$, $N_{2\nu} = \eta_1 \xi_\nu + \eta_2 \eta_\nu + \eta_3 \zeta_\nu$, $N_{3\nu} = \zeta_1 \xi_\nu + \zeta_2 \eta_\nu + \zeta_3 \zeta_\nu$,

so wird:

$$\sum e_\nu \xi_\nu = \frac{N_{23} - N_{32}}{2} + \alpha e_1, \quad \sum e_\nu \eta_\nu = \frac{N_{31} - N_{13}}{2} + \alpha e_2,$$
$$\sum e_\nu \zeta_\nu = \frac{N_{12} - N_{21}}{2} + \alpha e_3,$$

und:

$$(14) \quad p_2 \varkappa_1 = \frac{N_{32} - N_{23}}{2} - \alpha e_1 + \varepsilon \alpha_1 - \frac{e_1 - \varepsilon \xi}{h_2} = \frac{N_{32} - N_{23}}{2} + \frac{e_1}{h_1} + \varepsilon \left(\alpha_1 + \frac{\xi}{h_2} \right).$$

Den letzten Ausdruck für $p_2 \varkappa_1$ hat Herr Frobenius unter der Voraussetzung $\varepsilon = 0$ gefunden. (Journal für die r. u. a. Math. Bd. 110, S. 25, Nr. 26.) Er versagt bei einer Parallelflächenschar.

§ 15. Die Grössen P_1, P_2, R_1, R_2 und ϑ.

Die Definition der Ableitungen einer Function $\mathfrak{F}$ von x, y, z nach der Bogenlänge der Curven des Systems und der der Krümmungslinien erster Art entnehmen wir den Gleichungen (2) § 12 in der Form:

$$(1) \quad \begin{cases} g_1(\mathfrak{F}) = \varkappa_1 \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \lambda_1 \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} + \mu_1 \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}, \\ g_2(\mathfrak{F}) = \varkappa_2 \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \lambda_2 \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} + \mu_2 \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}, \\ g_0(\mathfrak{F}) = \xi \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial x} + \eta \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial y} + \zeta \dfrac{\partial \mathfrak{F}}{\partial z}, \end{cases}$$

und benutzen sie in Verbindung mit (10) § 7 zur Berechnung der Grössen P_1, P_2, R_1, R_2, ϑ.

Man hat:

$$g_0(\xi) = \xi \xi_1 + \eta \xi_2 + \zeta \xi_3,$$

somit nach (2) § 14:

$$g_0(\xi) = 2\alpha_1 = 2(e_2 \zeta - e_3 \eta).$$

Da aber:

$$\frac{1}{P_1} = \sum \varkappa_1 g_0(\xi), \quad \frac{1}{P_2} = \sum \varkappa_2 g_0(\xi),$$

so wird:

$$(2) \quad \begin{cases} \dfrac{1}{P_1} = 2(\varkappa_1 \alpha_1 + \lambda_1 \alpha_2 + \mu_1 \alpha_3) = 2(e_1 \varkappa_2 + e_2 \lambda_2 + e_3 \mu_2), \\ \dfrac{1}{P_2} = 2(\varkappa_2 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \mu_2 \alpha_3) = -2(e_1 \varkappa_1 + e_2 \lambda_1 + e_3 \mu_1). \end{cases}$$

Aus (13) § 14 entnehmen wir die weiteren Ausdrücke:

$$(3) \quad \frac{1}{P_1} = \frac{2p_1}{\dfrac{1}{h_1} - \dfrac{1}{h_2}}, \quad \frac{1}{P_2} = \frac{2p_2}{\dfrac{1}{h_2} - \dfrac{1}{h_1}}.$$

Mit Hülfe derselben soll ein in ξ, η, ζ und deren Ableitungen rationaler Ausdruck hergeleitet werden, dessen Verschwinden besagt, dass die Krümmungslinien erster Art mit den Haupt- und Binormallinien der Curvenschar zusammenfallen.

Aus (12) § 14 ergiebt sich:

$$p_1^2 = D_{41}^2 + D_{42}^2 + D_{43}^2 - D^2 + 2\frac{\alpha_1 D_{41} + \alpha_2 D_{42} + \alpha_3 D_{43}}{h_1} + \frac{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}{h_1^2}.$$

Man setze nun:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = A$$

und bezeichne die Adjuncte des Elements $a_{\mu\nu}$ mit $A_{\mu\nu}$. Dann wird:

$$\xi A = \alpha_1 A_{11} + \alpha_2 A_{12} + \alpha_3 A_{13}, \quad \eta A = \alpha_1 A_{12} + \alpha_2 A_{22} + \alpha_3 A_{23},$$
$$\zeta A = \alpha_1 A_{13} + \alpha_2 A_{23} + \alpha_3 A_{33},$$
$$D_{4\nu} = -\xi A_{1\nu} - \eta A_{2\nu} - \zeta A_{3\nu},$$

folglich:

$$\sum \alpha_\nu D_{4\nu} = -A.$$

Ferner:

$$\sum \alpha_\nu^2 = \xi \sum \alpha_\nu a_{1\nu} + \eta \sum \alpha_\nu a_{2\nu} + \zeta \sum \alpha_\nu a_{3\nu},$$
$$\sum \alpha_\nu a_{1\nu} = \xi(a_{11}\alpha - A_{22} - A_{33}) + \eta(a_{12}\alpha + A_{12}) + \zeta(a_{13}\alpha + A_{13})$$
$$= -D_{41} - \xi(A_{11} + A_{22} + A_{33}) + \alpha_1\alpha,$$
$$\sum \alpha_\nu a_{2\nu} = -D_{42} - \eta(A_{11} + A_{22} + A_{33}) + \alpha_2\alpha,$$
$$\sum \alpha_\nu a_{3\nu} = -D_{43} - \zeta(A_{11} + A_{22} + A_{33}) + \alpha_3\alpha,$$

also:

$$\sum \alpha_\nu^2 = -(A_{11} + A_{22} + A_{33} + D).$$

Endlich ist:

$$\sum D_{4\nu}^2 + (A_{11} + A_{22} + A_{33})D = \xi^2(A_{12}^2 - A_{11}A_{22} + A_{13}^2 - A_{11}A_{33})$$
$$+ \eta^2(A_{12}^2 - A_{11}A_{22} + A_{23}^2 - A_{22}A_{33}) + \zeta^2(A_{13}^2 - A_{11}A_{33} + A_{23}^2 - A_{22}A_{33})$$
$$+ 2\xi\eta(A_{13}A_{23} - A_{12}A_{33}) + 2\eta\zeta(A_{12}A_{13} - A_{23}A_{11}) + 2\xi\zeta(A_{12}A_{23} - A_{22}A_{13})$$
$$= A(-\xi^2(a_{22} + a_{33}) - \eta^2(a_{11} + a_{33}) - \zeta^2(a_{11} + a_{22}) + 2\xi\eta a_{12}$$
$$+ 2\eta\zeta a_{23} + 2\xi\zeta a_{13}) = -\alpha A,$$

und

$$\sum D_{4\nu}^2 - D^2 = -\alpha A + D\sum \alpha_\nu^2 = A\left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) - \frac{\Sigma\alpha_\nu^2}{h_1 h_2}.$$

Folglich:

$$(4)\quad \begin{cases} p_1^2 = \left(\frac{1}{h_2} - \frac{1}{h_1}\right)\left(A - \frac{\Sigma\alpha_\nu^2}{h_1}\right), \\ p_2^2 = \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right)\left(A - \frac{\Sigma\alpha_\nu^2}{h_2}\right) \end{cases}$$

und

$$(5)\quad \frac{1}{P_1^2 P_2^2} = -16\,\frac{A^2 + (\alpha A - D)\,\Sigma\alpha_\nu^2}{\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right)^2}.$$

Verschwindet $\Sigma\alpha_\nu^2$, so ist die betrachtete Curvenschar ein Strahlensystem; ist $\Sigma\alpha_\nu^2$ von Null verschieden, verschwindet aber der Ausdruck:

$$A^2 + (\alpha A - D)\sum \alpha_\nu^2,$$

so fallen die Krümmungslinien erster Art mit den Haupt- und Binormallinien zusammen.

Zur Bestimmung der Grössen R_1 und R_2 gehen wir aus von der Gleichung:

$$g_1(\varkappa_1) = \varkappa_1 \frac{\partial \varkappa_1}{\partial x} + \lambda_1 \frac{\partial \varkappa_1}{\partial y} + \mu_1 \frac{\partial \varkappa_1}{\partial z} = \frac{\varkappa_2}{R_1} + \frac{\xi}{h_1}.$$

Sie liefert:

$$\frac{1}{R_1} = \sum \varkappa_2 g_1(\varkappa_1) = -\sum \varkappa_1 g_1(\varkappa_2),$$

sodass:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{R_1} = \frac{\partial \varkappa_2}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} + \frac{\partial \mu_2}{\partial z} &+ \lambda_1\left(\varkappa_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial \varkappa_2}{\partial x}\right) + \mu_1\left(\varkappa_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial x} - \mu_1 \frac{\partial \varkappa_2}{\partial x}\right) \\ &+ \mu_1\left(\lambda_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial y} - \mu_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial y}\right) + \varkappa_1\left(\lambda_1 \frac{\partial \varkappa_2}{\partial y} - \varkappa_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial y}\right) \\ &+ \varkappa_1\left(\mu_1 \frac{\partial \varkappa_2}{\partial z} - \varkappa_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial z}\right) + \lambda_1\left(\mu_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial z} - \lambda_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial z}\right); \end{aligned}$$

da aber:

$$\varkappa_1 \lambda_2 - \lambda_1 \varkappa_2 = \zeta, \quad \varkappa_1 \mu_2 - \mu_1 \varkappa_2 = -\eta,$$

so wird:

$$\lambda_1\left(\varkappa_1 \frac{\partial \lambda_2}{\partial x} - \lambda_1 \frac{\partial \varkappa_2}{\partial x}\right) + \mu_1\left(\varkappa_1 \frac{\partial \mu_2}{\partial x} - \mu_1 \frac{\partial \varkappa_2}{\partial x}\right) = \lambda_1 \zeta_1 - \mu_1 \eta_1$$

und:

$$\lambda_1 \zeta_1 - \mu_1 \eta_1 + \mu_1 \xi_2 - \varkappa_1 \zeta_2 + \varkappa_1 \eta_3 - \lambda_1 \xi_3 = -2(\varkappa_1 e_1 + \lambda_1 e_2 + \mu_1 e_3).$$

Folglich:

$$(6)\quad \begin{cases} -\frac{1}{R_1} = \frac{1}{P_2} + \frac{\partial \varkappa_2}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_2}{\partial y} + \frac{\partial \mu_2}{\partial z}, \\ \text{und entsprechend:} \\ -\frac{1}{R_2} = \frac{1}{P_1} + \frac{\partial \varkappa_1}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_1}{\partial y} + \frac{\partial \mu_1}{\partial z}. \end{cases}$$

Die Grösse ϑ ist gegeben durch die Gleichung:

$$\vartheta = \sum \varkappa_2 g_0(\varkappa_1).$$

Wendet man die Formeln an:

$$\varkappa_2 = \eta\mu_1 - \zeta\lambda_1, \quad \lambda_2 = \zeta\varkappa_1 - \xi\mu_1, \quad \mu_2 = \xi\lambda_1 - \eta\varkappa_1,$$

so wird:

$$\vartheta = \varkappa_1(\zeta g_0(\lambda_1) - \eta g_0(\mu_1)) + \lambda_1(\xi g_0(\mu_1) - \zeta g_0(\varkappa_1)) + \mu_1(\eta g_0(\varkappa_1) - \xi g_0(\lambda_1)).$$

Man ersetze hier ξ^2 durch $1 - \eta^2 - \zeta^2$ u. s. f. und nehme:

$$(7) \qquad \varepsilon' = \varkappa_1\left(\frac{\partial\lambda_1}{\partial z} - \frac{\partial\mu_1}{\partial y}\right) + \lambda_1\left(\frac{\partial\mu_1}{\partial x} - \frac{\partial\varkappa_1}{\partial z}\right) + \mu_1\left(\frac{\partial\varkappa_1}{\partial y} - \frac{\partial\lambda_1}{\partial x}\right),$$

dann wird:

$$\vartheta = \varepsilon' + \sum \xi g_2(\varkappa_1)$$

oder

$$(8) \qquad \vartheta = \varepsilon' + \varepsilon.$$

Ersetzt man in den Klammern von (7) die Grössen $\varkappa_1, \lambda_1, \mu_1$ bez. durch $\zeta\lambda_2 - \eta\mu_2$, $\xi\mu_2 - \zeta\varkappa_2$, $\eta\varkappa_2 - \xi\lambda_2$, so entsteht wegen:

$$\sum \varkappa_1 g_2(\xi) = -\varepsilon = \sum \xi g_1(\varkappa_2)$$

die weitere Gleichung:

$$\varepsilon' = \varkappa_2\left(\frac{\partial\lambda_2}{\partial z} - \frac{\partial\mu_2}{\partial y}\right) + \lambda_2\left(\frac{\partial\mu_2}{\partial x} - \frac{\partial\varkappa_2}{\partial z}\right) + \mu_2\left(\frac{\partial\varkappa_2}{\partial y} - \frac{\partial\lambda_2}{\partial x}\right).$$

Der durch die Gleichung (8) gelieferte Ausdruck von ϑ ist nicht rational in ξ, η, ζ und ihren Ableitungen. Darstellungen von ϑ, die rational in diesen Grössen sind, findet man auf verschiedenen Wegen. Der einfachste derselben scheint folgender zu sein. Man gehe aus von (14) § 14, wonach:

$$N_{32} - N_{23} = 2p_2\varkappa_1 - \frac{2e_1}{h_1} - 2\varepsilon\left(\alpha_1 + \frac{\xi}{h_2}\right).$$

Nach (13) § 14 ist:

$$2p_2 = -\frac{1}{P_2}\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right),$$

nach § 13 und § 14:

$$2e_1 = 2\varepsilon\xi + \frac{\varkappa_2}{P_1} - \frac{\varkappa_1}{P_2}, \quad 2\alpha_1 = \frac{\varkappa_1}{P_1} + \frac{\varkappa_2}{P_2},$$

somit wird:

$$N_{32} - N_{23} = \varkappa_1\left(\frac{1}{h_2 P_2} - \frac{\varepsilon}{P_1}\right) - \varkappa_2\left(\frac{1}{h_1 P_1} + \frac{\varepsilon}{P_2}\right) + 2\alpha\varepsilon\xi.$$

Differentiirt man diese Gleichung nach x, die Gleichung:

$$N_{13} - N_{31} = \lambda_1\left(\frac{1}{h_2 P_2} - \frac{\varepsilon}{P_1}\right) - \lambda_2\left(\frac{1}{h_1 P_1} + \frac{\varepsilon}{P_2}\right) + 2\alpha\varepsilon\eta$$

nach y, die Gleichung:

$$N_{21} - N_{12} = \mu_1\left(\frac{1}{h_2 P_2} - \frac{\varepsilon}{P_1}\right) - \mu_2\left(\frac{1}{h_1 P_1} + \frac{\varepsilon}{P_2}\right) + 2\alpha\varepsilon\zeta$$

nach z und addirt die Ergebnisse, so entsteht unter Berücksichtigung von (11) § 7:

$$(9)\begin{cases} \frac{\partial(N_{32}-N_{23})}{\partial x}+\frac{\partial(N_{13}-N_{31})}{\partial y}+\frac{\partial(N_{21}-N_{12})}{\partial z}=\alpha g_0(\varepsilon)-\frac{2g_1(\varepsilon)}{P_1}-\frac{2g_2(\varepsilon)}{P_2} \\ \qquad +\varepsilon\left(\alpha^2+2\left(\frac{1}{P_1^2}+\frac{1}{P_2^2}\right)+g_0(\alpha)-\frac{1}{h_1^2}-\frac{1}{h_2^2}\right)+2\varepsilon^3+\vartheta\left(\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}\right)^2. \end{cases}$$

Da aber:

$$\frac{g_1(\varepsilon)}{P_1}+\frac{g_2(\varepsilon)}{P_2}=2\left(\alpha_1\frac{\partial\varepsilon}{\partial x}+\alpha_2\frac{\partial\varepsilon}{\partial y}+\alpha_3\frac{\partial\varepsilon}{\partial z}\right),$$

$$\frac{1}{P_1^2}+\frac{1}{P_2^2}=4\left(\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2\right),$$

$$\frac{1}{h_1^2}+\frac{1}{h_2^2}=\alpha^2+2D,\quad \left(\frac{1}{h_1}-\frac{1}{h_2}\right)^2=\frac{\alpha^2+4D}{4},$$

so enthält die Beziehung (9) eine Darstellung von ϑ in der verlangten Form. Dieselbe gewinnt an Bedeutung, wenn $\varepsilon=0$. Alsdann liefert sie die Bedingung, unter welcher die Flächenschar, deren orthogonale Trajectorien mit der betrachteten Curvenschar zusammenfallen, einem dreifach orthogonalen Flächensystem angehört ($\vartheta=0$), in der Gestalt:

$$(10)\qquad \frac{\partial(N_{32}-N_{23})}{\partial x}+\frac{\partial(N_{13}-N_{31})}{\partial y}+\frac{\partial(N_{21}-N_{12})}{\partial z}=0.$$

Diese Form der fraglichen Bedingungsgleichung ist von Herrn Frobenius im Journal für die r. u. a. Mathem. Bd. 110, S. 23 hergeleitet worden.

Der Gleichung (10) lassen sich noch andere ebenfalls sehr übersichtliche Formen geben. Man findet:

$$N_{32}-N_{23}=2\left(\frac{\partial\alpha_3}{\partial y}-\frac{\partial\alpha_2}{\partial z}\right)-2g_0(e_1),$$

somit kann man (10) ersetzen durch:

$$(11)\qquad \frac{\partial g_0(e_1)}{\partial x}+\frac{\partial g_0(e_2)}{\partial y}+\frac{\partial g_0(e_3)}{\partial z}=0.$$

Führt man endlich die Bezeichnung ein:

$$\delta_\nu(\mathfrak{F})=\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial x}\xi_\nu+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial y}\eta_\nu+\frac{\partial\mathfrak{F}}{\partial z}\zeta_\nu$$

und berücksichtigt, dass identisch:

$$\frac{\partial e_1}{\partial x}+\frac{\partial e_2}{\partial y}+\frac{\partial e_3}{\partial z}=0,$$

so findet man an Stelle von (11)

$$(12)\qquad \delta_1(e_1)+\delta_2(e_2)+\delta_3(e_3)=0.$$

Diese Form der Bedingungsgleichung ist von Herrn Weingarten im Journal für die r. u. a. Mathem. Bd. 83, S. 9 mitgetheilt, auch von Herrn Frobenius in der vorhin genannten Arbeit S. 24 begründet worden.

§ 16. Curvenschar mit einer vorgeschriebenen Schar von Asymptotenlinien.

Besitzt eine Curvenschar reelle Asymptotenlinien, die nicht gerade sind, so besteht sie aus den Binormallinien jeder der beiden Scharen von Asymptotenlinien. Es liegt daher nahe, falls eine Curvenschar gegeben ist, nach derjenigen Curvenschar (C) zu fragen, für welche sie eine Familie von Asymptotenlinien bildet, und weiterhin die zweite Familie der Asymptotenlinien der Schar (C) zu bestimmen.

Wir legen zu diesem Zweck eine Curvenschar durch die Gleichungen fest:

$$dx : dy : dz = u : v : w, \tag{1}$$

wo u, v, w Functionen von x, y, z seien, welche der Gleichung:

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1$$

genügen und nehmen $\frac{\partial u}{\partial x} = u_1$, $\frac{\partial v}{\partial y} = v_2$ u. s. f.

Die fragliche Curvenschar ist ein Strahlensystem, falls zwei der folgenden Bedingungen erfüllt sind:

$$\begin{cases} u_1 u + u_2 v + u_3 w = 0, \\ v_1 u + v_2 v + v_3 w = 0, \\ w_1 u + w_2 v + w_3 w = 0. \end{cases} \tag{2}$$

In diesem Falle verstehe man unter ξ, η, ζ drei Functionen von x, y, z, welche den Gleichungen genügen:

$$\xi u + \eta v + \zeta w = 0$$
$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

und setze:

$$\xi' = v\zeta - w\eta, \quad \eta' = w\xi - u\zeta, \quad \zeta' = u\eta - v\xi.$$

Ist die fragliche Curvenschar kein Strahlensystem, so mögen die Richtungscosinus ihrer Hauptnormalen mit ξ', η', ζ', die ihrer Binormalen mit ξ, η, ζ bezeichnet werden.

Die Differentialgleichungen:

$$dx : dy : dz = \xi : \eta : \zeta \tag{3}$$

bestimmen dann eine Curvenschar (C), für welche eine Familie von Asymptotenlinien durch die Gleichungen (1) festgelegt wird.

Die Normalkrümmung der durch (1) gekennzeichneten orthogonalen Trajectorien der Curvenschar (c) ist nämlich:

$$-u(\xi_1 u + \xi_2 v + \xi_3 w) - v(\eta_1 u + \eta_2 v + \eta_3 w) - w(\zeta_1 u + \zeta_2 v + \zeta_3 w),$$

oder:

$$\xi(u_1 u + u_2 v + u_3 w) + \eta(v_1 u + v_2 v + v_3 w) + \zeta(w_1 u + w_2 v + w_3 w).$$

Ist die Schar (1) ein Strahlensystem, so verschwinden hier die Coefficienten von ξ, η, ζ vermöge (2), anderenfalls sind sie proportional den Richtungscosinus der Hauptnormalen, sodass jedesmal die Normalkrümmung den Werth Null besitzt.

Eine Schar orthogonaler Trajectorien der Schar (C) wird festgelegt durch die Differentialgleichungen:

$$dx : dy : dz = mu + n\xi' : mv + n\eta' : mw + n\zeta',$$

wo:

$$m^2 + n^2 = 1$$

sein möge. Bezeichnen wir die Richtungscosinus ihrer Hauptnormalen mit ξ'', η'', ζ'', ihre erste Krümmung mit $\frac{1}{r_1}$, so ist:

$$\frac{\xi''}{r_1} = \frac{\partial(mu + n\xi')}{\partial x}(mu + n\xi') + \frac{\partial(mu + n\xi')}{\partial y}(mv + n\eta') + \frac{\partial(mu + n\xi')}{\partial z}(mw + n\zeta').$$

Damit sie die zweite Familie der Asymptotenlinien der Schar (c) darstelle, muss sein:

$$\xi''\xi + \eta''\eta + \zeta''\zeta = 0,$$

oder:

$$\left(m\sum \xi u_1 + n\sum \xi\xi_1'\right)(mu + n\xi') + \left(m\sum \xi u_2 + n\sum \xi\xi_2'\right)(mv + n\eta') + \left(m\sum \xi u_3 + n\sum \xi\xi_3'\right)(mw + n\zeta') = 0.$$

Hier verschwindet der Factor von m^2 und es bleibt:

$$(4)\left\{\begin{aligned} & m\left(\xi'\sum \xi u_1 + \eta'\sum \xi u_2 + \zeta'\sum \xi u_3 + u\sum \xi\xi_1' + v\sum \xi\xi_2' + w\sum \xi\xi_3'\right) \\ & \qquad + n\left(\xi'\sum \xi\xi_1' + \eta'\sum \xi\xi_2' + \zeta'\sum \xi\xi_3'\right) = 0. \end{aligned}\right.$$

Diese Gleichung lässt sich von zwei Gesichtspunkten aus betrachten, indem ihre Coefficienten sowohl in Bezug auf die Curvenschar (C), wie in Bezug auf die ursprünglich gegebene Curvenschar (1) eine bestimmte geometrische Bedeutung besitzen müssen. Halten wir uns im Gebiete der Schar (C), so ist

$$u = \alpha_1 \varkappa_1 + \alpha_2 \varkappa_2, \quad v = \alpha_1 \lambda_1 + \alpha_2 \lambda_2, \quad w = \alpha_1 \mu_1 + \alpha_2 \mu_2,$$
$$\xi' = -\alpha_2 \varkappa_1 + \alpha_1 \varkappa_2, \quad \eta' = -\alpha_2 \lambda_1 + \alpha_1 \lambda_2, \quad \zeta' = -\alpha_2 \mu_1 + \alpha_1 \mu_2$$

zu setzen, wo nach § 10:

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{-\frac{1}{h_2}}}{\sqrt{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}}}, \quad \alpha_2 = \frac{\sqrt{-\frac{1}{h_1}}}{\sqrt{\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}}}.$$

Man hat dann:

$$\begin{aligned} \xi u_1 + \eta v_1 + \zeta w_1 &= - u\xi_1 - v\eta_1 - w\zeta_1 \\ &= - \varkappa_1 (u g_1(\xi) + v g_1(\eta) + w g_1(\zeta)) \\ &\quad - \varkappa_2 (u g_2(\xi) + v g_2(\eta) + w g_2(\zeta)) \\ &\quad - \xi\,(u g_0(\xi) + v g_0(\eta) + w g_0(\zeta)) \\ &= \varkappa_1 \left(\frac{\alpha_1}{h_1} - \varepsilon\alpha_2\right) + \varkappa_2 \left(\varepsilon\alpha_1 + \frac{\alpha_2}{h_1}\right) - \xi\left(\frac{\alpha_1}{P_1} + \frac{\alpha_2}{P_2}\right), \end{aligned}$$

folglich:

$$\xi' \sum \xi u_1 + \eta' \sum \xi u_2 + \zeta' \sum \xi u_3 = - \alpha_1\alpha_2 \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) + \varepsilon = - \sqrt{\frac{1}{h_1}} \sqrt{-\frac{1}{h_2}} + \varepsilon.$$

Ferner:

$$\sum \xi\xi_1' = - \sum \xi'\xi_1 = - \varkappa_1 \left(\frac{\alpha_2}{h_1} + \varepsilon\alpha_1\right) - \varkappa_2 \left(\varepsilon\alpha_2 - \frac{\alpha_1}{h_2}\right) - \xi\left(-\frac{\alpha_2}{P_1} + \frac{\alpha_1}{P_2}\right),$$

daher:

$$u \sum \xi\xi_1' + v \sum \xi\xi_2' + w \sum \xi\xi_3' = - \alpha_1\alpha_2 \left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) - \varepsilon = - \sqrt{\frac{1}{h_1}} \sqrt{-\frac{1}{h_2}} - \varepsilon,$$

$$\xi' \sum \xi\xi_1' + \eta' \sum \xi\xi_2' + \zeta' \sum \xi\xi_3' = \frac{\alpha_2^2}{h_1} + \frac{\alpha_1^2}{h_2} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}.$$

Wir erhalten so an Stelle von (4):

$$2 \sqrt{\frac{1}{h_1}} \sqrt{-\frac{1}{h_2}}\, m - \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2}\right) n = 0.$$

Hierin liegen die früher gefundenen Sätze, dass die beiden Scharen von Asymptotenlinien in eine zusammenfallen, wenn $\frac{1}{h_1 h_2} = 0$, dass sie zu einander senkrecht sind, wenn $\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} = 0$.

Beziehen wir zweitens die Gleichung (4) auf die gegebene Curvenschar (1), so hat man u, v, w der Reihe nach durch ξ, η, ζ zu ersetzen, ferner

$$\begin{aligned} \xi' &= a_1 = \alpha_1\varkappa_1 + \alpha_2\varkappa_2, & \eta' &= b_1 = \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2, & \zeta' &= c_1 = \alpha_1\mu_1 + \alpha_2\mu_2, \\ \xi &= a_2 = -\alpha_2\varkappa_1 + \alpha_1\varkappa_2, & \eta &= b_2 = -\alpha_2\lambda_1 + \alpha_1\lambda_2, & \zeta &= c_2 = -\alpha_2\mu_1 + \alpha_1\mu_2 \end{aligned}$$

zu nehmen. Ist die Curvenschar (1) ein Strahlensystem, so sind α_1 und α_2 nur der Bedingung:

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 = 1$$

unterworfen. Anderenfalls wird:

$$\alpha_1 = \frac{\frac{1}{P_1}}{\sqrt{\frac{1}{P_1^2} + \frac{1}{P_2^2}}}, \quad \alpha_2 = \frac{\frac{1}{P_2}}{\sqrt{\frac{1}{P_1^2} + \frac{1}{P_2^2}}},$$

sodass nach den Bezeichnungen des § 10 die Curven $T_2 = 0$ mit den Hauptnormallinien, die Curven $T_1 = 0$ mit den Binormallinien der Schar (1) zusammenfallen.

Die Gleichung (4) nimmt jetzt die Gestalt an:

$$m\left(a_1\sum a_2\xi_1 + b_1\sum a_2\xi_2 + c_1\sum a_2\xi_3 + \xi\sum a_2\frac{\partial a_1}{\partial x} + \eta\sum a_2\frac{\partial a_1}{\partial y} + \zeta\sum a_2\frac{\partial a_1}{\partial z}\right)$$
$$+ n\left(a_1\sum a_2\frac{\partial a_1}{\partial x} + b_1\sum a_2\frac{\partial a_1}{\partial y} + c_1\sum a_2\frac{\partial a_1}{\partial z}\right) = 0.$$

Hier wird:

$$\sum a_2\xi_1 = \varkappa_1\left(\frac{\alpha_2}{h_1} + \varepsilon\alpha_1\right) + \varkappa_2\left(\varepsilon\alpha_2 - \frac{\alpha_1}{h_2}\right) + \xi\left(\frac{-\alpha_2}{P_1} + \frac{\alpha_1}{P_2}\right),$$

und damit:

$$a_1\sum a_2\xi_1 + b_1\sum a_2\xi_2 + c_1\sum a_2\xi_3 = \alpha_1\alpha_2\left(\frac{1}{h_1} - \frac{1}{h_2}\right) + \varepsilon = \frac{1}{l_{T_1}}.$$

Ferner:

$$\xi\sum a_2\frac{\partial a_1}{\partial x} + \eta\sum a_2\frac{\partial a_1}{\partial y} + \zeta\sum a_2\frac{\partial a_1}{\partial z} = a_2 g_0(a_1) + b_2 g_0(b_1) + c_2 g_0(c_1)$$
$$= -\alpha_2 g_0(\alpha_1) + \alpha_1 g_0(\alpha_2) + \vartheta = \frac{1}{L_{T_1}}.$$

Endlich:

$$a_1\sum a_2\frac{\partial a_1}{\partial x} + b_1\sum a_2\frac{\partial a_1}{\partial y} + c_1\sum a_2\frac{\partial a_1}{\partial z} = \alpha_1\sum a_2 g_1(a_1) + \alpha_2\sum a_2 g_2(a_1),$$

$$\sum a_2 g_1(a_1) = -\alpha_2 g_1(\alpha_1) + \alpha_1 g_1(\alpha_2) + \frac{1}{R_1},$$

$$\sum a_2 g_2(a_1) = -\alpha_2 g_2(\alpha_1) + \alpha_1 g_2(\alpha_2) - \frac{1}{R_2},$$

$$\alpha_1\sum a_2 g_1(a_1) + \alpha_2\sum a_2 g_2(a_1) = g_1(\alpha_2) - g_2(\alpha_1) + \frac{\alpha_1}{R_1} - \frac{\alpha_2}{R_2} = \frac{1}{R_{T_1}}.$$

An Stelle der Gleichung (4) entsteht somit:

$$\left(\frac{1}{l_{T_1}} + \frac{1}{L_{T_1}}\right)m + \frac{n}{R_{T_1}} = 0.$$

Wenn $\frac{1}{R_{T_1}}$ verschwindet, wird m gleich Null, und es folgt der Satz: *Besitzt eine Curvenschar zwei zu einander senkrechte Scharen* (A_1) und (A_2) *von Asymptotenlinien, so besteht die Schar* (A_1) *aus geodätischen Linien der Schar* (A_2) *und umgekehrt.*

Die Bestimmung derjenigen Curvenscharen, für welche die beiden Familien der Asymptotenlinien zusammenfallen und geradlinig sind, hat Herr Voss Mathem. Annalen, Bd. 23, S. 64 durchgeführt.

